Das Konfluenzproblem für Spurersetzungssysteme

Von der Fakultät für Informatik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften genehmigte Abhandlung

von

Markus Lohrey
aus Nürnberg

Hauptberichter: Prof. Dr. V. Diekert
Mitberichter: Dr. U. Hertrampf
Mitberichter: Prof. Dr. F. Otto

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1999

Stuttgart, 1999

Mein Dank gilt all jenen Menschen, die mich in meiner Arbeit unterstützt haben. Ganz besonders möchte ich mich bei Prof. Dr. Volker Diekert für seine Unterstützung bedanken. Durch ihn bin ich mit dem Thema dieser Arbeit in Kontakt gekommen. Seiner ausgezeichneten fachlichen Betreuung und seiner steten Motivation verdanke ich das Zustandekommen der vorliegenden Arbeit. Bei Dr. Ulrich Hertrampf und Prof. Dr. Friedrich Otto bedanke ich mich für die Anfertigung der Zweitgutachten. Meinen Arbeitskollegen Dr. Anca Muscholl und Dr. Holger Petersen danke ich für ihre wertvollen fachlichen Ratschläge. Meine zahlreichen Fragen haben sie stets geduldig beantwortet.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Konfluenzproblem für Ersetzungssysteme über Spurmonoiden, welche auch als Spurersetzungssysteme bekannt sind, untersucht. Die Untersuchung dieses Problems orientiert sich an drei Klassen von Spurersetzungssystemen: Längenreduzierende Systeme, monadische Systeme und löschende Systeme. Für jede dieser drei Teilklassen wir das Konfluenzproblem in Abhängigkeit von dem zugrundeliegenden Spurmonoid untersucht. Es wird gezeigt, daß für längenreduzierende Spurersetzungssysteme das Konfluenzproblem unentscheidbar ist, falls das zugrundeliegende Spurmonoid weder frei noch frei kommutativ ist. Für freie Monoide bzw. frei kommutative Monoide wird sich das Konfluenzproblem als P–vollständig bzw. PSPACE–vollständig für längenreduzierende Systeme erweisen. Für die Klasse der monadischen Systeme werden diese Schranken auf AC^1 für den Fall eines freien Monoids bzw. NP für den Fall eines frei kommutativen Monoids reduziert. Schließlich wird gezeigt, daß für jedes Spurmonoid das Konfluenzproblem für löschende Spurersetzungssysteme in Polynomialzeit gelöst werden kann. Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird ein eingeschränkter Konfluenzbegriff, den ich (α, β)–Konfluenz nenne, für Spurersetzungssysteme betrachtet. Es wird gezeigt, daß (α, β)–Konfluenz für Spurersetzungssysteme entscheidbar ist. Mittels dieses Resultats werden schließlich mehrere Kriterien für Spurersetzungssysteme angegeben, welche die Entscheidbarkeit der Konfluenz implizieren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Durch die wachsende Verbreitung von Informationssystemen mit einer großen Zahl von nebenläufig operierenden Prozessen in den letzten Jahren hat auch innerhalb der Theoretischen Informatik das Interesse an formalen Modellen zur Spezifikation von nebenläufigen Systemen stark zugenommen. Eine mathematische Untersuchung von nebenläufigen Verhalten innerhalb eines solchen Modells wird jedoch erst möglich, falls die Modellbeschreibung eines Prozesses genügend weit von der realen Prozeßimplementierung abstrahiert. Ein von vielen formalen Modellen vorgenommener Abstraktionsschritt ist die Zuordnung einer (endlichen) Menge von atomaren Aktionen zu einem Prozeß, welche die Menge aller von diesem Prozeß ausführbaren Aktionen darstellt. Zusätzlich zu der Angabe von atomaren Aktionen muß jedoch festgelegt werden, (i) welche Abfolgen von Aktionen ein Prozeß ausführen kann und (ii) welche Aktionen parallel ausgeführt werden können. Hierin unterscheiden sich existierende formale Modelle häufig sehr stark. Eine sehr einfache Lösung dieser zwei Aufgaben besteht darin, (i) die Menge aller möglichen Aktionsfolgen, die ein Prozeß ausführen kann, explizit oder implizit mittels eines geeigneten Formalismus (wie z.B. endliche Automaten) anzugeben und (ii) explizit anzugeben, welche Aktionen parallel ausgeführt werden können. Dieser Ansatz wird innerhalb der Theorie der Mazurkiewicz–Spuren gewählt.

Der Begriff einer Spur wurde 1977 von A. Mazurkiewicz in die Informatik eingeführt [Maz77]. Ausgangspunkt ist ein Alphabet Σ von atomaren Aktionen und eine irreflexive und symmetrische Relation $I \subseteq \Sigma \times \Sigma$, welche als Unabhängigkeitsrelation bezeichnet wird. Zwei Aktionen a und b stehen in der Relation I, falls a und b parallel ausgeführt werden können. Dies erklärt die Forderung an I, symmetrisch zu sein. Die Irreflexivität von I bedeutet, daß eine Aktion a nicht parallel zu sich selbst ausgeführt werden kann. Z.B. sollten zwei Schreibzugriffe auf die gleiche Speicherzelle nicht parallel ausführbar sein. Ein Ablauf eines Prozesses ist nun einfach ein endliches Wort über dem

Alphabet Σ. Solch ein Wort kann als die zeitliche Abfolge von Aktionen, die ein externer Beobachter des Prozesses sieht, betrachtet werden. Verschiedene Wörter über Σ sollten jedoch nicht notwendigerweise auch als verschiedene Prozeßabläufe angesehen werden. Dies sei an einem Beispiel erläutert. Gelte etwa $\Sigma = \{a, b, c\}$ und sei $(a, b) \in I$, d.h. a und b sind zwei Aktionen, die parallel ablaufen können. Angenommen ein externer Beobachter eines Prozesses notiert die Aktionsfolge $adabc$, d.h. der Beobachter notiert die Aktion a direkt gefolgt von der Aktion b. Da jedoch die Aktionen a und b parallel ausgeführt werden können und somit in keiner kausalen Abhängigkeit stehen, hätte der Beobachter ebensogut die Folge $adbac$ sehen können. Die Wörter $acabc$ und $acbac$ sollten somit den gleichen Prozeßablauf bezeichnen. Allgemeiner sollten je zwei Wörter $sabt$ und $sbat$ mit $s, t \in \Sigma^*$ und $(a, b) \in I$ den gleichen Prozeßablauf bezeichnen. Da die Eigenschaft, den gleichen Prozeßablauf zu bezeichnen, offensichtlich eine Äquivalenzrelation sein sollte, wird schließlich eine Relation $\equiv_I$ als die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge Σ^* aller endlichen Wörter über Σ, die alle Paare $(sabt, sbat)$ mit $s, t \in \Sigma^*$ und $(a, b) \in I$ enthält, definiert. Ein Prozeßablauf wird dann schließlich mit einer Äquivalenzklasse bezüglich der Relation $\equiv_I$ identifiziert. Solch eine Äquivalenzklasse wird auch als Mazurkiewicz–Spur, oder kurz Spur, bezeichnet. Da, wie leicht zu sehen ist, die Relation $\equiv_I$ auf der Menge Σ^* eine Kongruenzrelation bezüglich der Konkatenation von Wörtern ist, kann auf der Menge aller Spuren eine (assoziative) Konkatenationsoperation repräsentantenweise definiert werden, welche die Menge aller Spuren zu einem Monoid macht. Dieses Monoid wird als das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ bezeichnet. Die Konkatenation von Spuren kann als die sequentielle Komposition von Prozeßabläufen betrachtet werden. Ist die Unabhängigkeitsrelation I die leere Relation, so ist das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ offensichtlich gleich dem freien Monoid aller endlichen Wörter über Σ. Sind andererseits alle paarweise verschiedenen Symbole unabhängig, so entspricht $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ dem frei kommutativen Monoid über Σ. In diesem Fall ist nur noch die Anzahl der Vorkommen der verschiedenen Symbole in einer Spur von Bedeutung. Somit können Spuren als Vektoren über den natürlichen Zahlen repräsentiert werden, und die Konkatenation von Spuren entspricht der komponentenweisen Addition von Vektoren.

Das im letzten Abschnitt erläuterte Modell der Mazurkiewicz–Spuren zeichnet sich insbesondere durch seinen hohen Abstraktionsgrad und seine mathematische Fundiertheit aus. Bei den zur Beschreibung des Modells verwendeten Begriffen (Wörter, Äquivalenzklassen, Monoide) handelt es sich um mathematisch wohlvertraute Begriffe und Strukturen. In der Tat wurde sogar der Begriff des Spurmonoids schon 1969 von Cartier und Foata [CF69] unter dem Begriff des frei partiell kommutativen Monoids in die Kombinatorik eingeführt. Jedoch nicht nur innerhalb der Theorie der nebenläufigen Systeme und der Kombinatorik sind Spuren ein Forschungsgegenstand. Da der Begriff des Spurmonoids eine Verallgemeinerung des Begriffs des freien Monoids darstellt, liegt es nahe, Untersuchungen über freie Monoide auf Spurmonoide auszudehnen. Als Beispiele hierfür seien etwa die Betrachtungen zu erkennbaren und rationalen Spursprachen (Kapitel 6 in [DR95]), Spurgleichungen [Dub86b, Mat97, DMM97, Die97] und Spurersetzungssystemen [Die87, Die90b] genannt.

Unter einem Spurersetzungssystem versteht man eine zumeist endliche Menge $\mathcal{R}$ von Regeln, deren linke und rechte Seiten aus Spuren bestehen. Eine solche Menge definiert eine Einschrittersetzungsrelation wie folgt: Eine Spur $\boldsymbol{s}$ kann durch einen Ersetzungsschritt in eine Spur $\boldsymbol{t}$ überführt werden, kurz $\boldsymbol{s} \rightarrow_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$, falls Faktorisierungen (bezüglich der Konkatenation von Spuren) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u\ell v}$ und $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{urv}$ der Spuren $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{t}$ existieren, und $\boldsymbol{\ell} \rightarrow \boldsymbol{r}$ eine Regel aus $\mathcal{R}$ ist. Für den Fall des freien Monoids erhält man so den Begriff des Semi–Thue Systems, welcher 1914 von A. Thue eingeführt wurde [Thu14] und die Grundlage der formalen Sprachtheorie darstellt. Die Bücher [Jan88] und [BO93] geben einen guten Einblick in die reichhaltige Theorie der Semi–Thue Systeme. Aber auch für den zum freien Monoid entgegengesetzten Fall des frei kommutativen Monoids verallgemeinern Spurersetzungssysteme ein in der Theoretischen Informatik vertrautes Modell, nämlich den Begriff des Vektorersetzungssystems. Vektorersetzungssysteme sind wiederum äquivalent zu Petri–Netzen [Rei85], welche eines der ältesten und am weitesten verbreitetesten Modelle zur Spezifikation nebenläufigen Verhaltens sind. Jedoch auch innerhalb des oben skizzierten Ansatzes der Beschreibung von nebenläufigen Prozessen durch Spuren, können Spurersetzungssysteme sinnvoll eingesetzt werden. Eine der Hauptanwendungen von Ersetzungssystemen im allgemeinen ist das Lösen von Wortproblemen über Objekten unterschiedlicher Art. Die Grundidee ist, Gleichungen zwischen verschiedenen Objekten durch Orientieren der Gleichungen in Ersetzungsregeln umzuwandeln, und die Gleichheit von zwei Objekten modulo der angegebenen Gleichungen durch schrittweise Anwendung der so erhaltenen Ersetzungsregeln zu beweisen. Im Kontext der Mazurkiewicz–Spuren repräsentieren Gleichungen zwischen Spuren Paare von Prozeßabläufen, die als identisch betrachtet werden sollten, z.B. weil ihre Anwendung auf einen Anfangszustand stets den gleichen Endzustand produziert.

Das im letzten Abschnitt erläuterte allgemeine Prinzip des Orientierens von Gleichungen und der schrittweisen Anwendung von Ersetzungsregeln zur Lösung von Wortproblemen birgt natürlich in der beschriebenen allgemeinen Form einige Probleme in sich. Zum einen scheint nicht klar zu sein, wie die gegebenen Gleichungen orientiert werden müssen. Außerdem kann die schrittweise Anwendung von Regeln in Endlosschleifen oder Sackgassen führen. Um Probleme dieser Art auszuschließen wurden spezielle Eigenschaften von Ersetzungssystemen eingeführt. Die wohl zwei wichtigsten dieser Eigenschaften sind Termination und Konfluenz. Wir erläutern diese Eigenschaften im folgenden kurz für Spurersetzungssysteme, für andere Typen von Ersetzungssystemen sind diese Eigenschaften jedoch völlig analog definiert. Ein Spurersetzungssystem heißt terminierend, falls keine unendliche Kette $\boldsymbol{s}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{s}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{s}_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ von Ersetzungsschritten existiert. Ein terminierendes System wird häufig auch als Noethersch bezeichnet. Ein Spurersetzungssystem heißt konfluent, wenn für alle Spuren $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ mit der Eigenschaft, daß $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ durch endlich viele Ersetzungsschritte aus $\boldsymbol{s}$ abgeleitet werden können, eine Spur $\boldsymbol{v}$ existiert, in welche $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ durch endlich viele Ersetzungsschritte transformiert werden können. Es ist bekannt, daß für ein terminierendes und konfluentes Spurersetzungssystem $\mathcal{R}$ das Wortproblem, d.h. die Frage, ob zwei Spuren $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{t}$ durch Anwendung aller Gleichungen der Form $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r}$, wobei $\boldsymbol{\ell} \to \boldsymbol{r}$ eine Regel aus $\mathcal{R}$ ist, effektiv entscheidbar ist. Unglücklicherweise ist aber bereits für Semi–Thue Systeme sowohl die Termination als auch die Konfluenz im allgemeinen unentscheidbar. Beschränkt man sich jedoch auf terminierende Semi–Thue Systeme, so wird Konfluenz entscheidbar, siehe etwa [BO81]. Dieses positive Resultat überträgt sich jedoch nicht auf Spurersetzungssysteme. Narendran und Otto haben in [NO88] ein Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I) mit der Eigenschaft angegeben, daß es unentscheidbar ist, ob ein längenreduzierendes Spurersetzungssystem über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ konfluent ist. Ein Spurersetzungssystem ist längenreduzierend, falls für jede Regel die linke Seite echt mehr Symbole als die rechte Seite enthält. Ein solches Spurersetzungssystem ist natürlich terminierend.

Das positive Resultat aus [BO81] sowie das negative Resultat aus [NO88] motivieren Untersuchungen zur genaueren Lokalisierung der Grenze zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit des Konfluenzproblems für Spurersetzungssysteme. Untersuchungen dieser Art sind der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Wir beschließen diese Einleitung mit einem kurzen Überblick über diese Arbeit.

In Kapitel 1 werden kurz einige grundlegende Begriffe eingeführt. Kapitel 2 präsentiert einige für die Spurtheorie wichtige Resultate, wie etwa das Projektionslemma, Levis Lemma für Spuren und grundlegende Aussagen zu erkennbaren Spursprachen. Außerdem wird der für Spurersetzungssysteme zentrale Begriff des kritischen Paares eingeführt sowie Kodierungen zwischen Spurersetzungssystemen betrachtet. Kapitel 3 beschäftigt sich mit längenreduzierenden Spurersetzungssystemen. Zunächst werden längenreduzierende Semi–Thue Systeme und Vektorersetzungssysteme untersucht. Es wird gezeigt, daß das Konfluenzproblem P–vollständig für längenreduzierende Semi–Thue Systeme bzw. PSPACE–vollständig für längenreduzierende Vektorersetzungssysteme ist. Ist andererseits das zugrundeliegende Spurmonoid weder frei noch frei kommutativ, so wird sich das Konfluenzproblem als unentscheidbar für längenreduzierende Systeme erweisen. Dieses Resultat verschärft das oben erwähnte Resultat von Narendran und Otto. Da außerdem Spurmonoide über einem drei–elementigen Unabhängigkeitsalphabet existieren, die weder frei noch frei kommutativ sind, löst dieses Resultat die Frage nach der minimalen Anzahl von Symbolen, für die das Konfluenzproblem für längenreduzierende Systeme unentscheidbar ist, siehe [Die90b], S. 117, und [BD95], Problem 6. In Kapitel 4 werden wir uns gegenüber dem längenreduzierenden Fall weiter auf sogenannte monadische Systeme einschränken. Ein längenreduzierendes Spurersetzungssystem heißt monadisch, falls jede rechte Seite aus höchstens einem Symbol besteht. Es wird sich zeigen, daß für monadische Semi–Thue Systeme das Konfluenzproblem in der parallelen Komplexitätsklasse AC^1 enthalten ist und sich somit effizient parallelisieren läßt. Aufgrund der oben erwähnten P–Vollständigkeit ist es wahrscheinlich, daß das Konfluenzproblem für längenreduzierende Semi–Thue Systeme im Gegensatz hierzu inhärent sequentiell ist. Auch für Vektorersetzungssysteme verringert sich die Komplexität des Konfluenzproblems beim Übergang vom längenreduzierenden Fall zum monadischen Fall. Genauer wird in Abschnitt 4.2 gezeigt, daß Konfluenz für monadische Vektorersetzungssysteme in NP entschieden werden kann. Die Frage, ob Konfluenz für allgemeine monadische Spurersetzungssysteme entscheidbar ist, konnte jedoch in dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Schließlich untersuchen wir in Kapitel 5 die noch stärker eingeschränkte Klasse der löschenden Spurersetzungssysteme. Ein längenreduzierendes Spurersetzungssystem heißt löschend, falls alle rechten Seiten leer sind[1]. Wir werden zeigen, daß für ein beliebiges Spurmonoid M in Polynomialzeit entschieden werden kann, ob ein löschendes Spurersetzungssystem

[1] Löschende Systeme sind im Englischen unter dem Begriff „special systems“ bekannt.

über M konfluent ist. Im letzten Kapitel 6 dieser Arbeit werden wir einen eingeschränkten Konfluenzbegriff, den wir (α, β)–Konfluenz (wobei α und β feste natürliche Zahlen sind) nennen, untersuchen. Ein Spurersetzungssystem nennen wir (α, β)–konfluent, falls folgendes gilt: Können Spuren $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ von einer gemeinsamen Spur $\boldsymbol{s}$ durch höchstens α viele Ersetzungsschritte erreicht werden, so muß eine Spur $\boldsymbol{v}$ existieren, welche von $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ durch höchstens β viele Ersetzungsschritte erreicht werden kann. Das Hauptresultat von Kapitel 6 ist, das (α, β)–Konfluenz für beliebige Spurmonoide entscheidbar ist. Dieses Resultat wird sich als Spezialfall eines Resultats über die Entscheidbarkeit eines Fragments der logischen Theorie 1. Ordnung der Einschrittersetzungsrelation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$, wobei $\mathcal{R}$ ein Spurersetzungssystem ist, ergeben. In Abschnitt 6.3 werden wir die Entscheidbarkeit der (α, β)–Konfluenz ausnutzen, um mehrere (entscheidbare) Kriterien für Spurersetzungssysteme anzugeben, welche die Entscheidbarkeit der Konfluenz implizieren. Die Frage, ob die volle logische Theorie 1. Ordnung der Einschrittersetzungsrelation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ entscheidbar ist, bleibt in dieser Arbeit leider ungelöst. Wir beschließen diese Arbeit mit einigen Bemerkungen zu dieser offenen Frage. Zusammenfassend möchte ich die folgenden drei Resultate als die Hauptresultate meiner Arbeit hervorheben.

- Konfluenz für längenreduzierende Spurersetzungssysteme ist entscheidbar genau dann, wenn das zugrundeliegende Spurmonoid frei oder frei kommutativ ist.

- Konfluenz für löschende Spurersetzungssysteme ist entscheidbar.

- (α, β)–Konfluenz ist entscheidbar für Spurersetzungssysteme.

Kapitel 1

Präliminarien

Wir werden in diesem Kapitel die für diese Arbeit benötigten Begriffe, Notationen und Definitionen einführen. Nach der Vorstellung von allgemeinen Begriffen und Notationen wird kurz auf abstrakte Reduktionssysteme und Boolesche Schaltkreise eingegangen. Daran anschließend wird der zentrale Begriff des Spurmonoids eingeführt. Aufbauend auf diesen Begriff werden Spurersetzungssysteme eingeführt.

1.1 Allgemeine Begriffe und Notationen

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$. Den Logarithmus von n zur Basis zwei bezeichnen wir mit $ld\,(n)$. Sei A eine beliebige Menge. Die Potenzmenge von A wird mit 2^A bezeichnet. Die *Identitätsrelation* $\{(a, a) \mid a \in A\}$ auf der Menge A wird mit Id_A bezeichnet. Ist $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf der Menge A, so benutzen wir meistens die Infixschreibweise für R, d.h. anstatt $(a, b) \in R$ schreiben wir $a\,R\,b$. Sind R und S binäre Relationen auf der Menge A, so ist die *Komposition* $R \circ S$ von R und S definiert durch $R \circ S = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists c \in A : a\,R\,c,\ c\,S\,b\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *n–fache Komposition* R^n von R wie folgt induktiv definiert: (i) $R^0 = Id_A$ und (ii) $R^{n+1} = R^n \circ R$. Der *transitive Abschluß* R^+ von R ist definiert durch $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$. Der *reflexive und transitive Abschluß* R^* von R ist definiert durch $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i$. Schließlich sei $R^{\leq n} = \bigcup_{i=0}^{n} R^i$.

Ein Alphabet ist eine beliebige Menge, deren Elemente auch als Symbole bezeichnet werden. Sei Σ ein Alphabet. Die Menge aller endlichen Wörter über Σ wird mit Σ^* bezeichnet. Das leere Wort wird mit 1 bezeichnet. Die

Menge $\Sigma^*\backslash\{1\}$ aller nicht–leeren endlichen Wörter über Σ wird mit Σ^+ bezeichnet. Die Konkatenation zweier Wörter $s, t \in \Sigma^*$ wird mit st bezeichnet. Da die Konkatenation von Wörtern eine assoziative Operation ist, bildet Σ^* mit der Konkatenation von Wörtern ein Monoid, dessen neutrales Element das leere Wort 1 ist. Dieses Monoid ist das *freie Monoid über* Σ und wird ebenfalls mit Σ^* bezeichnet. Für $\Gamma \subseteq \Sigma$ ist der Monoidmorphismus $\pi_\Gamma : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ definiert durch (i) $\pi_\Gamma(a) = a$ falls $a \in \Gamma$ und (ii) $\pi_\Gamma(a) = 1$ falls $a \notin \Gamma$. Die Länge eines Wortes $s \in \Sigma^*$ wird mit $|s|$ bezeichnet. Die Anzahl der Vorkommen des Symbols $a \in \Sigma$ in dem Wort $s \in \Sigma^*$ wird mit $|s|_a$ bezeichnet. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\Sigma^n = \{s \in \Sigma^* \mid |s| = n\}$. Die Menge aller Symbole aus Σ, die in dem Wort $s \in \Sigma^*$ vorkommen, wird mit $alph(s)$ bezeichnet, d.h. $alph(s) = \{a \in \Sigma \mid |s|_a > 0\}$. Gilt $s = tu$ für $t, u \in \Sigma^*$, so ist t ein *Präfix* von s und u ein *Suffix* von s. Gilt zusätzlich $u \neq 1$ (bzw. $t \neq 1$), so ist t (bzw. u) ein *echter* Präfix (bzw. Suffix) von s.

Sei auf dem endlichen Alphabet Σ eine lineare Ordnung $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fixiert. Ein *kommutatives Wort* über Σ ist ein Wort der Form $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}$, wobei $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere gilt $1 = a_1^0 \cdots a_n^0$ und $|a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}| = i_1 + \cdots + i_n$. Die Menge aller kommutativen Wörter über Σ ist $\Sigma^\oplus$. Die Konkatenation zweier kommutativer Wörter $a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}$ und $a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n}$ ist $a_1^{i_1+j_1} \cdots a_n^{i_n+j_n}$. Zusammen mit dem leeren Wort als neutrales Element und der Konkatenation von kommutativen Wörtern bildet $\Sigma^\oplus$ ein kommutatives Monoid. Dieses Monoid ist das *frei kommutative Monoid* über Σ und wird ebenfalls mit $\Sigma^\oplus$ bezeichnet. Offensichtlich ist das Monoid $\Sigma^\oplus$ isomorph zu $\mathbb{N}^{|\Sigma|}$ mit der komponentenweisen Addition von Vektoren über $\mathbb{N}$, wobei der Isomorphismus das kommutative Wort $a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}$ auf den Vektor $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{|\Sigma|}$ abbildet.

Unter einem *Graphen* verstehen wir in dieser Arbeit stets einen ungerichteten endlichen Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten, d.h. ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ wobei V eine endliche Menge von Knoten ist, und $E \subseteq V \times V$ eine irreflexive und symmetrische Relation ist, deren Elemente die Kanten des Graphen sind. Für $W \subseteq V$ bezeichnet $G[W] = (W, E \cap (W \times W))$ den *durch W induzierten Teilgraphen* von G.

Unter einer deterministischen Turing–Maschine $\mathcal{M}$ verstehen wir in dieser Arbeit stets ein Tupel $(Q, \Sigma, \Box, \delta, q_0, q_f)$, wobei Q die endliche Zustandsmenge ist, Σ das endliche Bandalphabet ist, $\Box \in \Sigma$ das Leersymbol ist, $\delta : Q\backslash\{q_f\} \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R\}$ die totale Übergangsfunktion ist, $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist, und $q_f \in Q$ der eindeutige Endzustand ist. Die Symbole L und R zeigen an, ob sich der Schreib/Lesekopf nach links oder rechts bewegt. Übergänge einer solchen Maschine sind wie üblich definiert. Eine Eingabe für $\mathcal{M}$ ist ein Wort aus $(\Sigma\backslash\{\Box\})^*$. Die Zellen des beidseitig–unendlichen Schreib/Lesebands von $\mathcal{M}$ seien mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ indiziert. In der zur Eingabe $a_0a_1\cdots a_{n-1} \in (\Sigma\backslash\{\Box\})^*$ gehörenden Anfangskonfiguration enthält Zelle i das Symbol a_i für $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, alle anderen Zellen enthalten das Leersymbol $\Box$, der Schreib/Lesekopf befindet sich in Zelle 0, und die Maschine befindet sich im Anfangszustand q_0. Die Maschine $\mathcal{M}$ hält genau dann auf der Eingabe w, wenn sie von der zu w gehörenden Anfangskonfiguration nach endlich vielen Schritten den eindeutigen Endzustand q_f erreicht. Die Kodierung einer deterministischen Turing–Maschine als binäres Wort hat die Länge $\Omega(|Q| \cdot |\Sigma| \cdot (ld(|Q|) + ld(|\Sigma|)))$, was der Größe der binären Kodierung der Übergangsfunktion δ entspricht.

1.2 Abstrakte Reduktionssysteme

Im folgenden werden kurz einige Begriffe und Fakten zu abstrakten Reduktionssystemen genannt, siehe [Klo90] für mehr Details. Sei A eine beliebige Menge und $\rightarrow \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Das Paar $(A, \rightarrow)$ wird dann auch als *abstraktes Reduktionssystem* bezeichnet. Die Relation $\rightarrow$ heißt *terminierend auf* $a \in A$, falls keine unendlich Kette der Form $a = a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots$ in A existiert. Die Relation $\rightarrow$ heißt *terminierend*, falls $\rightarrow$ auf jedem $a \in A$ terminierend ist. Ein Element $a \in A$ heißt *irreduzibel* bezüglich $\rightarrow$, falls kein $b \in A$ mit $a \rightarrow b$ existiert. Ein $b \in A$ ist eine *Normalform* von $a \in A$, falls $a \rightarrow^* b$ gilt, und b irreduzibel bezüglich $\rightarrow$ ist. Ein Paar $(a, b) \in A \times A$ heißt *konfluent* (bezüglich $\rightarrow$), falls ein $c \in A$ mit $a \rightarrow^* c$ und $b \rightarrow^* c$ existiert. Wir sagen, daß $\rightarrow$ auf $a \in A$ konfluent ist, falls für alle $b, c \in A$ mit $a \rightarrow^* b$ und $a \rightarrow^* c$ ein $d \in A$ existiert mit $b \rightarrow^* d$ und $c \rightarrow^* d$. Die Relation $\rightarrow$ heißt *konfluent*, falls $\rightarrow$ auf allen $a \in A$ konfluent ist. Die Relation $\rightarrow$ heißt *lokal konfluent*, falls für alle $a, b, c \in A$ mit $a \rightarrow b$ und $a \rightarrow c$ ein $d \in A$ existiert mit $b \rightarrow^* d$ und $c \rightarrow^* d$. Offensichtlich ist jede konfluente Relation auch lokal konfluent. Die umgekehrte Implikation ist jedoch falsch. Beschränkt man sich jedoch auf terminierende Relationen, so gilt das folgende Resultat, welches allgemein als Newmans Lemma bekannt ist [New43].

Lemma 1.2.1. Ist die Relation $\rightarrow$ terminierend, so ist $\rightarrow$ konfluent genau dann, wenn $\rightarrow$ lokal konfluent ist.

Im Gegensatz zu den oben eingeführten Begriffen sind nach dem Kenntnisstand des Autors die folgenden Begriffe nicht bereits an anderer Stelle definiert worden. Seien $\alpha, \beta > 0$ zwei natürliche Zahlen. Ein Paar $(a, b) \in A \times A$ heißt α–*konfluent* (bezüglich $\rightarrow$), falls ein $c \in A$ mit $a \rightarrow^{\leq\alpha} c$ und $b \rightarrow^{\leq\alpha} c$ existiert. Die Relation $\rightarrow$ heißt (α, β)–*konfluent*, falls für alle $a, b, c \in A$ mit $a \rightarrow^{\leq\alpha} b$ und $a \rightarrow^{\leq\alpha} c$ ein $d \in A$ existiert mit $b \rightarrow^{\leq\beta} d$ und $c \rightarrow^{\leq\beta} d$. Eine (α, β)–konfluente Relation ist offensichtlich auch lokal konfluent sowie (γ, ζ)–konfluent für alle $0 < \gamma \leq \alpha$ und $\zeta \geq \beta$. Eine $(1, \beta)$–konfluente Relation nennen wir auch kurz β–konfluent. Eine 1–konfluente Relation wird üblicherweise auch als *stark konfluent* bezeichnet. Es ist bekannt, daß eine stark konfluente Relation auch konfluent ist [New43]. Das folgende Lemma verallgemeinert diese Tatsache.

Lemma 1.2.2. Existiert ein $\alpha > 0$ so, daß $\rightarrow$ (α, α)–konfluent ist, so ist $\rightarrow$ konfluent.

Beweis. Sei $\rightarrow$ (α, α)–konfluent für ein $\alpha > 0$. Dann ist die Relation $\rightarrow^{\leq\alpha}$ stark konfluent und damit auch konfluent. Gelte nun $a \rightarrow^* b$ und $a \rightarrow^* c$. Dann gilt natürlich auch $a\,(\rightarrow^{\leq\alpha})^*\,b$ und $a\,(\rightarrow^{\leq\alpha})^*\,c$. Da die Relation $\rightarrow^{\leq\alpha}$ konfluent ist, existiert ein $d \in A$ mit $b\,(\rightarrow^{\leq\alpha})^*\,d$ und $c\,(\rightarrow^{\leq\alpha})^*\,d$, d.h. es gilt $b \rightarrow^* d$ und $c \rightarrow^* d$. Also ist $\rightarrow$ konfluent. □

1.3 Boolesche Schaltkreise

Wir setzen im folgenden voraus, daß der Leser mit den Komplexitätsklassen L (deterministischer logarithmischer Platz), NL (nichtdeterministischer logarithmischer Platz), P (deterministische polynomielle Zeit), NP (nichtdeterministische polynomielle Zeit) und PSPACE (polynomieller Platz) grob vertraut ist, siehe z.B. [Pap94]. In diesem Abschnitt führen wir kurz einige Grundbegriffe aus der Schaltkreiskomplexitätstheorie ein, siehe z.B. [BS90]. Wir betrachten in dieser Arbeit Boolesche Schaltkreise, die aus UND–, ODER– und NICHT–Gattern aufgebaut sind. Solch ein Boolescher Schaltkreis mit n Eingängen, die linear angeordnet seien, und genau einem Ausgang akzeptiert eine endliche Sprache $L \subseteq \{a, b\}^n$ auf offensichtliche Weise, wobei a und b den Wahrheitswerten wahr und falsch entsprechen. Sei $\mathcal{F} = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Booleschen Schaltkreisen, wobei C_n eine Teilmenge von $\{a, b\}^n$ akzeptiert. Wir sagen, daß $\mathcal{F}$ *uniform* ist, falls sich die Funktion $n \mapsto C_n$ in deterministischen logarithmischen Platz berechnen läßt. Dies impliziert insbesondere, daß ein Polynom $p(n)$ existiert so, daß C_n aus maximal $p(n)$

vielen Gattern besteht. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit AC^k die Menge aller Sprachen $L \subseteq \{a,b\}^*$, für die eine uniforme Familie $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Booleschen Schaltkreisen mit den folgenden drei Eigenschaften existiert: (i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ so, daß die Tiefe von C_n (die Länge des längsten Pfades in C_n) durch $c \cdot ld^k(n)$ beschränkt ist. (ii) Der Eingangsgrad jedes UND– bzw. ODER–Gatters ist unbeschränkt[1]. (iii) C_n akzeptiert die Sprache $\{a,b\}^n \cap L$. Die Klasse NC^k für $k \geq 1$ ist auf analoge Weise definiert, nur das der Eingangsgrad eines jeden Gatters höchstens zwei sein darf. Wir definieren $\mathrm{NC} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{NC}^k$. Die Probleme in NC werden auch als diejenigen Probleme betrachtet, die sich effizient parallelisieren lassen. Da ein UND– bzw. ODER–Gatter mit m Eingängen durch einen Baum aus UND– bzw. ODER–Gattern mit Eingangsgrad 2, welcher die Höhe $ld(m)$ hat, ersetzt werden kann, ergibt sich die folgende Hierarchie:

$$\mathrm{AC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{AC}^1 \subseteq \mathrm{NC}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{NC} \subseteq \mathrm{P}$$

Außerdem ist noch $\mathrm{AC}^0 \subsetneq \mathrm{NC}^1$ bekannt. Für die restlichen Inklusionen der obigen Hierarchie ist die Echtheit eine offene Frage. Insbesondere ist es nicht bekannt, ob $\mathrm{NC} = \mathrm{P}$ gilt. Es wird allgemein vermutet, daß $\mathrm{NC} \subsetneq \mathrm{P}$ gilt. Indem Schaltkreise mit mehr als nur einem Ausgang erlaubt werden, ist es möglich, Klassen von Funktionen, welche den Klassen AC^k, NC^k und NC entsprechen, zu definieren. Wir verzichten auf eine formale Definition und sagen z.B. einfach, daß eine bestimmte Funktion in AC^k berechnet werden kann. Insbesondere werden wir an einigen Stellen dieser Arbeit Reduktionen zwischen Entscheidungsproblemen benutzten, die sich in AC^0 berechnen lassen. Solche Reduktionsfunktionen lassen sich dann insbesondere in deterministischen logarithmischen Platz berechnen. Genauer ist schon jede in NC^1 berechenbare Funktion in deterministischen logarithmischen Platz berechenbar, siehe z.B. [Pap94], S. 395. Falls die Vermutung $\mathrm{NC} \subsetneq \mathrm{P}$ zutrifft, so bedeutet dies, daß kein unter NC–Reduktionen P–vollständiges Problem in NC enthalten sein kann, d.h. solche Probleme wären inhärent sequentiell.

1.4 Spurmonoide

Ein *Unabhängigkeitsalphabet* ist ein Paar (Σ, I), wobei Σ ein endliches Alphabet ist, und $I \subseteq \Sigma \times \Sigma$ eine irreflexive und symmetrische binäre Relation ist,

[1] Da jedoch die Anzahl der Gatter in C_n durch ein Polynom $p(n)$ beschränkt ist, kann das gleiche auch für den Eingangsgrad eines jeden Gatters angenommen werden.

die auch als *Unabhängigkeitsrelation* bezeichnet wird. Ein Unabhängigkeitsalphabet ist also ein Graph, und wird auch als solcher in Graphiken dargestellt. Das Komplement $(\Sigma \times \Sigma)\backslash I$ der Unabhängigkeitsrelation I wird auch als *Abhängigkeitsrelation* bezeichnet. Sie ist eine reflexive und symmetrische Relation. Das Paar $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma)\backslash I)$ wird auch als *Abhängigkeitsalphabet* bezeichnet. Ist (Σ, I) ein Unabhängigkeitsalphabet, so wird die kleinste Kongruenzrelation auf der Menge Σ^*, welche die Relation $\{(ab, ba) \mid a\, I\, b\}$ enthält, mit $\equiv_I$ bezeichnet. Da I symmetrisch ist, ist $\equiv_I$ der reflexive und transitive Abschluß der Relation $\{(sabt, sbat) \mid s, t \in \Sigma^*, a\, I\, b\}$. Für $s \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $[s]_I = \{t \in \Sigma^* \mid s \equiv_I t\}$ die Äquivalenzklasse bezüglich $\equiv_I$, welche s enthält. Eine solche Äquivalenzklasse bezeichnen wir auch als eine *Spur*. Gilt $[s]_I = \{s\}$ für ein Wort $s \in \Sigma^*$, was z.B. für $s \in \{1\} \cup \Sigma$ der Fall ist, so identifizieren wir die Spur $[s]_I$ mit dem Wort s. Die Menge aller Spuren bezeichnen wir mit $\mathbb{M}(\Sigma, I) = \{[s]_I \mid s \in \Sigma^*\}$. Da $\equiv_I$ eine Kongruenzrelation auf Σ^* ist, kann die *Konkatenation* zweier Spuren $[s]_I$ und $[t]_I$ als $[st]_I$ definiert werden. Die Menge $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ aller Spuren bildet mit der Konkatenation von Spuren und der *leeren Spur* $[1]_I = \{1\}$ als neutrales Element das von (Σ, I) erzeugte *Spurmonoid*, welches wir ebenfalls mit $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ bezeichnen. Das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist also das Quotientenmonoid $\Sigma^*/{\equiv_I}$. Da für alle Wörter $s, t \in \Sigma^*$ aus $s \equiv_I t$ die Identitäten $|s| = |t|$, $|s|_a = |t|_a$ und $alph(s) = alph(t)$ folgen, können wir $|[s]_I| = |s|$, $|[s]_I|_a = |s|_a$ und $alph([s]_I) = alph(s)$ definieren. Wir werden im weiteren die folgenden Konventionen verwenden. Zur Bezeichnung von Wörtern über einem Alphabet benutzen wir die eventuell indizierten Buchstaben s, t, u, v und w. Zur Bezeichnung von Spuren benutzen wir eventuell indizierte fettgedruckte Kleinbuchstaben. Die Unabhängigkeitsrelation I kann wie folgt auf die Menge $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ erweitert werden: $\boldsymbol{u}\, I\, \boldsymbol{v}$ falls $alph(\boldsymbol{u}) \times alph(\boldsymbol{v}) \subseteq I$. Offensichtlich gilt $1\, I\, \boldsymbol{u}$ für jede Spur $\boldsymbol{u}$. Eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ heißt *zusammenhängend*, falls keine Faktorisierung der Form $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} \neq 1 \neq \boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v}\, I\, \boldsymbol{w}$ existiert. Eine Menge $L \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ von Spuren heißt zusammenhängend, falls jede Spur in L zusammenhängend ist. Die *Konkatenation* $L_1 L_2$ zweier Mengen $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist definiert als $L_1 L_2 = \{\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{u}_1 \in L_1, \boldsymbol{u}_2 \in L_2\}$. Die *Kleenesche Hülle* L^* von $L \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist die Menge $L^* = \{\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_n \mid n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in L\}$. Für ein $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist $min(\boldsymbol{u}) = \{a \in \Sigma \mid \exists s \in \Sigma^* : \boldsymbol{u} = [as]_I\}$ die Menge aller *minimalen* Symbole von $\boldsymbol{u}$ und $max(\boldsymbol{u}) = \{a \in \Sigma \mid \exists s \in \Sigma^* : \boldsymbol{u} = [sa]_I\}$ die Menge aller *maximalen Symbole* von $\boldsymbol{u}$.

Beispiel 1.4.1. Wir betrachten das Unabhängigkeitsalphabet

$$(\Sigma, I) = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (a, e), (e, a), (b, e), (e, b)\}),$$

welches als Graph dargestellt der folgenden Kette entspricht:

$$d - a - e - b - c$$

Das entsprechende Abhängigkeitsalphabet wird durch den folgenden Graphen veranschaulicht, wobei die Schleifen der Form (x, x) für $x \in \Sigma$ weggelassen wurden:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ c \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & d \arrow[d, dash] \\ a \arrow[rr, dash] & & b \end{tikzcd}$$

Sei $\boldsymbol{u} = [adbcedcb]_I$. In $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \{&adbcedcb, dabcedcb, adcbedcb, dacbedcb, adbcedbc, dabcedbc, adcbedbc, \\ &dacbedbc, adcebdcb, dacebdcb, adcebdbc, dacebdbc\}. \end{aligned}$$

Die Spur $\boldsymbol{u}$ ist zusammenhängend. Außerdem gilt $alph(\boldsymbol{u}) = \Sigma$, $|\boldsymbol{u}| = 8$, $min(\boldsymbol{u}) = \{a, d\}$ und $max(\boldsymbol{u}) = \{b, c\}$.

Im folgenden sei (Σ, I) ein Unabhängigkeitsalphabet. Gilt $I = (\Sigma \times \Sigma) \setminus Id_\Sigma$, so ist $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ isomorph zu dem frei kommutativen Monoid $\Sigma^\oplus$ über Σ, welches wiederum isomorph zu $\mathbb{N}^{|\Sigma|}$ ist. Ist etwa $a_1, a_2 \ldots, a_n$ eine beliebige lineare Ordnung auf Σ, so ist dieser Isomorphismus durch $\boldsymbol{u} \mapsto a_1^{|\boldsymbol{u}|_{a_1}} \cdots a_n^{|\boldsymbol{u}|_{a_n}}$ definiert, und wir identifizieren dieses kommutative Wort mit der Spur $\boldsymbol{u}$. Gilt andererseits $I = \emptyset$, so ist $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ isomorph zum freien Monoid Σ^*.

1.5 Spurersetzungssysteme

Ein *Spurersetzungssystem*, kurz SES, über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{M}(\Sigma, I) \times \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Spurersetzungssyteme bezeichnen wir mit den eventuell indizierten Buchstaben $\mathcal{R}$ und $\mathcal{P}$. Im folgenden sei $\mathcal{R}$ ein SES über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$. Elemente von $\mathcal{R}$ werden auch als *Spurersetzungsregeln*, oder kurz *Regeln*, über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ bezeichnet. Eine Regel $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ wird auch mit $\boldsymbol{\ell} \to \boldsymbol{r}$ bezeichnet. Wir definieren die Menge $dom(\mathcal{R})$

aller *linken Seiten* von $\mathcal{R}$ durch $dom(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{\ell} \mid \exists \boldsymbol{r} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) : (\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}\}$. Die Menge $ran(\mathcal{R})$ aller *rechten Seiten* von $\mathcal{R}$ ist analog definiert durch $ran(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{r} \mid \exists \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) : (\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}\}$. Sei $c = (\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ eine Regel. Die Relation $\rightarrow_c$ ist definiert durch

$$\rightarrow_c = \{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \times \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) : \boldsymbol{s} = \boldsymbol{u\ell v}, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{urv}\}.$$

Die *Einschrittersetzungsrelation* $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ ist definiert durch $\rightarrow_{\mathcal{R}} = \bigcup_{c \in \mathcal{R}} \rightarrow_c$. Der *reflexive, transitive und symmetrische Abschluß* der Relation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ wird mit $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$ bezeichnet. Dies ist die kleinste Kongruenzrelation auf der Menge Σ^*, welche alle Paare in $\mathcal{R}$ enthält. Ist $I = \emptyset$, d.h. $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \Sigma^*$, so wird $\mathcal{R}$ auch als ein *Semi–Thue System* über Σ bezeichnet. Eine detailierte Behandlung von Semi–Thue Systemen findet sich in [Jan88] und [BO93]. Gilt andererseits $I = (\Sigma \times \Sigma) \backslash Id_\Sigma$, d.h. $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \Sigma^\oplus \simeq \mathbb{N}^{|\Sigma|}$, so wird $\mathcal{R}$ auch als ein *Vektorersetzungssystem* über Σ bezeichnet. Das SES $\mathcal{R}$ heißt terminierend (konfluent, lokal konfluent, (α, β)–konfluent), falls die Relation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ terminierend (konfluent, lokal konfluent, (α, β)–konfluent) ist. Das SES $\mathcal{R}$ ist *längenreduzierend*, falls $|\boldsymbol{\ell}| > |\boldsymbol{r}|$ für alle $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ gilt. Ein längenreduzierendes SES ist offensichtlich terminierend. Das SES $\mathcal{R}$ ist *monadisch*, falls $ran(\mathcal{R}) \subseteq \{1\} \cup \Sigma$ gilt, und $\mathcal{R}$ längenreduzierend ist. Das SES $\mathcal{R}$ ist *löschend*, falls $ran(\mathcal{R}) = \{1\}$ und $1 \notin dom(\mathcal{R})$ gilt[2]. Die Menge aller bezüglich $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ irreduziblen Spuren wird mit $\mathrm{IRR}(\mathcal{R})$ bezeichnet. Eine Spur $\boldsymbol{v}$ ist eine Normalform der Spur $\boldsymbol{u}$ bezüglich $\mathcal{R}$, falls $\boldsymbol{v}$ eine Normalform von $\boldsymbol{u}$ bezüglich $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ ist.

In dieser Arbeit betrachten wir unter anderem Algorithmen, die als Eingabe ein SES erhalten. Da wir die Komplexität dieser Algorithmen analysieren wollen, ist es notwendig, die *Größe des SES* $\mathcal{R}$ zu definieren. Ein Wort s über einem mindestens zweielementigen Alphabet benötigt im allgemeinen $|s|$ viele Bits zu seiner Kodierung. Dies gilt natürlich auch für Spuren aus $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, falls mindestens zwei Symbole aus Σ abhängig sind, da dann $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ das freie Monoid $\{a, b\}^*$ als Untermonoid enthält. Dies motiviert die folgende Definition. Ist $I \neq (\Sigma \times \Sigma) \backslash Id_\Sigma$, d.h. ist $\mathcal{R}$ kein Vektorersetzungssystem, so definieren wir die Größe $\|\mathcal{R}\|$ von $\mathcal{R}$ durch

$$\|\mathcal{R}\| = \sum_{(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}} (|\boldsymbol{\ell}| + |\boldsymbol{r}|).$$

Ist andererseits $\mathcal{R}$ ein Vektorersetzungssystem, d.h. gilt $I = (\Sigma \times \Sigma) \backslash Id_\Sigma$ und $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \Sigma^\oplus$, so ist diese Größendefinition nicht mehr angebracht,

[2]Löschende Systeme sind im Englischen unter dem Begriff „special systems“ bekannt.

da in diesem Fall eine binäre Kodierung der linken und rechten Seiten der Regeln möglich ist. Für eine natürliche Zahl n sei $bit(n) = \lfloor ld\,(n) \rfloor + 1$ falls $n > 0$ und $bit(0) = 1$, d.h. $bit(n)$ ist die Länge der Binärkodierung von n. Für ein kommutatives Wort $s = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ sei $bit(s) = \sum_{i=1}^{n} bit(k_i)$. Für ein Vektorersetzungssystem $\mathcal{R}$ definieren wir schließlich die Größe $\|\mathcal{R}\|$ von $\mathcal{R}$ durch

$$\|\mathcal{R}\| = \sum_{(\ell,r)\in\mathcal{R}} (bit(\ell) + bit(r)).$$

Die folgende Aufzählung gibt einige bekannte Entscheidbarkeitsresultate und Komplexitätsresultate für Spurersetzungssysteme wieder.

(1) Es ist unentscheidbar, ob ein beliebiges Semi–Thue System terminierend [HL78], konfluent [BO84] bzw. lokal konfluent [BO84] ist.

(2) Es ist entscheidbar, ob ein terminierendes Semi–Thue System konfluent ist, siehe etwa [BO81].

(3) Für ein längenreduzierendes Semi–Thue System $\mathcal{R}$ kann in Zeit $O(\|\mathcal{R}\|^3)$ entschieden werden, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist [KKMN85].

(4) Es ist entscheidbar, ob ein Vektorersetzungssystem terminierend, konfluent [VRL98] bzw. lokal konfluent ist. Das Konfluenzproblem für Vektorersetzungssysteme ist überdies EXPSPACE–hart [VRL98].

(5) Es existiert ein Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ so, daß es unentscheidbar ist, ob ein längenreduzierendes SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ konfluent ist [NO88].

Die in (1) zusammengefaßten Unentscheidbarkeitsresultate resultieren aus der Fähigkeit von Semi–Thue Systemen, Turing–Maschinen zu simulieren. Hierzu ist lediglich ein zweielementiges Alphabet notwendig. Aussage (2) beruht auf der Tatsache, daß für ein Semi–Thue System $\mathcal{R}$ endlich viele sogenannte kritische Paare existieren (siehe Abschnitt 2.4), und $\mathcal{R}$ genau dann lokal konfluent ist, falls alle kritischen Paare konfluent sind [NB72]. Ist nun $\mathcal{R}$ terminierend, so kann offensichtlich entschieden werden, ob ein gegebenes Paar konfluent bezüglich $\to_{\mathcal{R}}$ ist. Ist also $\mathcal{R}$ terminierend, so kann effektiv entschieden werden, ob $\mathcal{R}$ lokal konfluent ist (und damit nach Newmans Lemma auch, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist). Wird nur die Termination von $\mathcal{R}$ vorausgesetzt, so ist es jedoch nicht möglich, eine Schranke für die Längen der zusammenführenden Ableitungen für ein gegebenes kritisches Paar anzugeben. Betrachtet man jedoch ein längenreduzierendes Semi–Thue System, so existiert eine solche Schranke natürlich. Eine genauere Analyse des in [BO81] angegebenen Entscheidungsverfahrens für das Konfluenzproblem führt in diesem Fall zu der in (3) angegebenen Komplexität. Die Entscheidbarkeit der Termination für Vektorersetzungssysteme scheint ein Folkloreresultat zu sein, welches sehr einfach unter Zuhilfenahme von Dicksons Lemma [Dic13] bewiesen werden kann. Die Entscheidbarkeit der Konfluenz für Vektorersetzungssysteme wurde in [VRL98] durch eine Reduktion auf das sogenannte Home Space Problem für Vektorersetzungssysteme bewiesen. Dessen Entscheidbarkeit wurde wiederum in [EJ89] durch eine Reduktion auf das Erreichbarkeitsproblem für Vektorersetzungssysteme, welches bekanntlich entscheidbar ist [May84], siehe auch [Kos82], bewiesen. Die Entscheidbarkeit der lokalen Konfluenz für Vektorersetzungssysteme kann durch eine direkte Reduktion auf das Erreichbarkeitsproblem für Vektorersetzungssysteme recht einfach bewiesen werden. Aussage (5) mag angesichts der Entscheidbarkeitsresultate in (3) und (4) überraschend sein. Aussage (5) impliziert insbesondere, daß es für ein SES im Gegensatz zu Semi–Thue Systemen im allgemeinen keine sinnvoll definierte endliche Menge von kritischen Paaren gibt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist eine genauere Analyse des Konfluenzproblems für Spurersetzungssysteme. Wir definieren hierzu die folgenden Entscheidungsprobleme:

- KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$.
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

- KOMO($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein monadisches SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$.
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

- KOLÖ($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein löschendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$.
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

- Für natürliche Zahlen $\alpha, \beta > 0$ ist $\mathrm{KO}_{\alpha,\beta}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$.
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ (α, β)–konfluent?

Für Vektorersetzungssysteme definieren wir schließlich noch die folgenden drei Entscheidungsprobleme:

- KOLRV ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein längenreduzierendes Vektorersetzungssystem (über einem beliebigen Alphabet)
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

- KOMOV ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein monadisches Vektorersetzungssystem (über einem beliebigen Alphabet).
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

- KOLÖV ist das folgende Entscheidungsproblem:
  EINGABE: Ein löschendes Vektorersetzungssystem (über einem beliebigen Alphabet).
  FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

Schließlich definieren wir noch das *uniforme Wortproblem* für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Spurersetzungssystemen über einem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ als das folgende Entscheidungsproblem:
EINGABE: Ein $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ und Spuren $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$.
FRAGE: Gilt $\boldsymbol{s} \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$?

Kapitel 2

Vorbereitende Lemmata

In diesem Kapitel werden wir einige wichtige Resultate über Spuren und Spurersetzungssysteme aufführen, die in dieser Arbeit häufig benutzt werden. Es wird die Repräsentation von Spuren durch Tupel von Wörtern vorgestellt, das für diese Arbeit zentrale Levis Lemma für Spuren erläutert, und ein kurzer Einblick in erkennbare Spursprachen gegeben. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden einige für diese Arbeit wichtige Lemmata über Spurersetzungssysteme bewiesen. Wir werden den wichtigen Begriff des kritischen Paares für Spurersetzungssysteme einführen und Kodierungen zwischen Spurersetzungssystemen behandeln.

2.1 Rekonstruierbare Tupel

Die Repräsentation einer Spur als eine Äquivalenzklasse von Wörtern ist häufig recht unhandlich, da solche Äquivalenzklassen recht viele Wörter enthalten können, siehe etwa Beispiel 1.4.1. In diesem Abschnitt wird eine alternative Repräsentation von Spuren durch Tupel von Wörtern vorgestellt. Diese Repräsentation hat auch den Vorteil, daß Techniken für Wörter auf Spuren angewendet werden können. Wieder sei (Σ, I) ein beliebiges Unabhängigkeitsalphabet. Mit D werde die Abhängigkeitsrelation $(\Sigma \times \Sigma)\backslash I$ bezeichnet. Ist $\Gamma \subseteq \Sigma$, so ist das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Gamma, I \cap (\Gamma \times \Gamma))$ ein Untermonoid des Spurmonoids $\mathbb{M}(\Sigma, I)$. Wir können in diesem Fall den Monoidmorphismus $\pi_\Gamma : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ auch als einen Monoidmorphismus von $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ nach $\mathbb{M}(\Gamma, I \cap (\Gamma \times \Gamma))$ betrachten. Eine *Cliquenüberdeckung* des Abhängigkeitsalphabets (Σ, D) ist eine Folge $\mathcal{C} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ von nicht–

leeren Alphabeten mit den folgenden zwei Eigenschaften: (i) $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ und (ii) $D = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i \times \Sigma_i$. Offensichtlich besitzt jedes Abhängigkeitsalphabet eine Überdeckung durch Cliquen mit höchstens zwei Elementen. Sei $\mathcal{C} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung von (Σ, D). Natürlich können wir annehmen, daß keine Clique Teilmenge einer anderen Clique ist. Diese Annahme wird im weiteren stets implizit gemacht. Wir benutzen dann auch die Abkürzung $\pi_i = \pi_{\Sigma_i}$ für die Projektion auf die i–te Clique. Schließlich definieren wir den Monoidmorphismus $\pi_{\mathcal{C}} : \mathbb{M}(\Sigma, I) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ durch $\boldsymbol{u} \mapsto (\pi_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \pi_n(\boldsymbol{u}))$, wobei die Konkatenation von Tupeln aus $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ komponentenweise definiert ist. Die folgende Aussage ist auch als Projektionslemma für Spuren bekannt [CP85].

Lemma 2.1.1. Sei $\mathcal{C} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung von (Σ, D). Dann ist der Monoidmorphismus $\pi_{\mathcal{C}} : \mathbb{M}(\Sigma, I) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ injektiv.

Insbesondere ist $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ isomorph zu seinem Bild $\pi_{\mathcal{C}}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ unter $\pi_{\mathcal{C}}$. Tupel aus der Menge $\pi_{\mathcal{C}}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ werden auch als *rekonstruierbare Tupel* bezeichnet [CM85]. Ein Tupel $(s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ ist also genau dann rekonstruierbar, wenn eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ existiert mit $\pi_i(\boldsymbol{u}) = s_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sind $(s_1, \ldots, s_n)$ und $(t_1, \ldots, t_n)$ rekonstruierbar, so ist natürlich auch $(s_1t_1, \ldots, s_nt_n)$ rekonstruierbar. Außerdem gilt $\pi_j(s_i) = \pi_i(s_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend für die Rekonstruierbarkeit von $(s_1, \ldots, s_n)$, siehe Beispiel 2.1.3. Es gilt jedoch das folgende Lemma, siehe [Dub86b], Proposition 1.6.(ii).

Lemma 2.1.2. Sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$, und sei $\mathcal{C} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets (Σ, D). Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\pi_i(\boldsymbol{u}) = s_it_i$ eine Faktorisierung von $\pi_i(\boldsymbol{u})$. Dann gilt $\pi_i(s_j) = \pi_j(s_i)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ genau dann, wenn $(s_1, \ldots, s_n)$ und $(t_1, \ldots, t_n)$ rekonstruierbar sind.

Insbesondere existiert nicht für jede Folge von Faktorisierungen $\pi_i(\boldsymbol{u}) = s_it_i$ $(1 \leq i \leq n)$ eine Faktorisierung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{vw}$ mit $\pi_i(\boldsymbol{v}) = s_i$ und $\pi_i(\boldsymbol{w}) = t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Schließlich sei noch angemerkt, daß der Monoidmorphismus $\pi_{\mathcal{C}}$ surjektiv ist, falls die Cliquen Σ_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ paarweise disjunkt sind. In diesem Fall bildet also $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n\}$ eine Partition des Alphabets Σ, es gilt $I = \bigcup_{i \neq j} \Sigma_i \times \Sigma_j$, und $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist isomorph zu dem direkten Produkt $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ von freien Monoiden. Wir identifizieren dann eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit dem Worttupel $(\pi_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \pi_n(\boldsymbol{u}))$.

Beispiel 2.1.3. Sei (Σ, I) das Unabhängigkeitsalphabet aus Beispiel 1.4.1. Dann ist $\mathcal{C} = (\{a,b\},\{b,d\},\{c,d,e\},\{a,c\})$ eine Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma)\backslash I)$. Sei $\boldsymbol{u} = [adbcedcb]_I$. Es gilt dann $\pi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{u}) = (abb, dbdb, dcedc, acc)$, und dieses Tupel ist somit rekonstruierbar. Die Faktorisierung $\pi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{u}) = (ab, db, d, a)(b, db, cedc, cc)$ erfüllt die Bedingung aus Lemma 2.1.2. In der Tat gilt $\boldsymbol{u} = [adb]_I[cedcb]_I$, $\pi_{\mathcal{C}}([adb]_I) = (ab, db, d, a)$ und $\pi_{\mathcal{C}}([cedcb]_I) = (b, db, cedc, cc)$. Das Tupel $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (ab, bd, dc, ca)$ ist andererseits nicht rekonstruierbar, obwohl $\pi_i(s_j) = \pi_j(s_i)$ für alle $i, j \in \{1,2,3,4\}$ gilt.

2.2 Levis Lemma für Spuren

Eine der zentralen Aussagen über Spurmonoide ist das folgende Lemma, welches auch als Levis Lemma für Spuren bekannt ist [CP85].

Lemma 2.2.1. Seien $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Es gilt $\boldsymbol{st} = \boldsymbol{uv}$ genau dann, wenn Spuren $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ existieren mit $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{wy}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{wx}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{xz}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{yz}$ und $\boldsymbol{x} \, I \, \boldsymbol{y}$.

Die folgende Verallgemeinerung von Levis Lemma kann leicht durch eine Induktion unter Benutzung von Levis Lemma gezeigt werden, siehe [CP85], Korollar 1.4, für den Fall $m = 2$.

Lemma 2.2.2. Seien $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Es gilt

$$\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n$$

genau dann, wenn Spuren $\boldsymbol{w}_{i,j} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ $(i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$ existieren mit

(1) $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{w}_{i,1}\boldsymbol{w}_{i,2} \cdots \boldsymbol{w}_{i,n}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$,

(2) $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_{1,j}\boldsymbol{w}_{2,j} \cdots \boldsymbol{w}_{m,j}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und

(3) $\boldsymbol{w}_{i,j} \, I \, \boldsymbol{w}_{k,l}$ falls $1 \leq i < k \leq m$ und $1 \leq l < j \leq n$.

Die Situation aus dem obigen Lemma kann durch ein Diagramm der folgenden Art veranschaulicht werden, wobei $m = 5, n = 4$ gilt. Die i–te Spalte entspricht hierbei $\boldsymbol{u}_i$, die j–te Zeile entspricht $\boldsymbol{v}_j$, und das Rechteck, welches aus dem Schnitt der i–ten Spalte mit der j–ten Zeile entsteht, entspricht der Spur $\boldsymbol{w}_{i,j}$. Schließlich gilt $\boldsymbol{w}_{i,j} \, I \, \boldsymbol{w}_{k,l}$, falls sich $\boldsymbol{w}_{i,j}$ links oberhalb von $\boldsymbol{w}_{k,l}$ befindet.

$\boldsymbol{v}_4$	$\boldsymbol{w}_{1,4}$	$\boldsymbol{w}_{2,4}$	$\boldsymbol{w}_{3,4}$	$\boldsymbol{w}_{4,4}$	$\boldsymbol{w}_{5,4}$
$\boldsymbol{v}_3$	$\boldsymbol{w}_{1,3}$	$\boldsymbol{w}_{2,3}$	$\boldsymbol{w}_{3,3}$	$\boldsymbol{w}_{4,3}$	$\boldsymbol{w}_{5,3}$
$\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{w}_{1,2}$	$\boldsymbol{w}_{2,2}$	$\boldsymbol{w}_{3,2}$	$\boldsymbol{w}_{4,2}$	$\boldsymbol{w}_{5,2}$
$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{w}_{1,1}$	$\boldsymbol{w}_{2,1}$	$\boldsymbol{w}_{3,1}$	$\boldsymbol{w}_{4,1}$	$\boldsymbol{w}_{5,1}$
	$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{u}_3$	$\boldsymbol{u}_4$	$\boldsymbol{u}_5$

2.3 Erkennbare Spursprachen

Für eine ausführliche Einführung in das Gebiet der erkennbaren Spursprachen sei der Leser an Kapitel 6 in [DR95] verwiesen. Im folgenden sei M ein beliebiges Monoid. Ein M–*Automat* ist ein Tripel $\mathcal{A} = (Q, h, F)$, wobei Q ein endliches Monoid ist, $h : M \longrightarrow Q$ ein Monoidmorphismus ist, und $F \subseteq Q$ gilt. Der M–Automat $\mathcal{A}$ *erkennt* die Menge $L(\mathcal{A}) = h^{-1}(F)$. Eine Menge $L \subseteq M$ ist *erkennbar*, falls ein M–Automat $\mathcal{A}$ mit $L = L(\mathcal{A})$ existiert. Die Menge aller erkennbaren Teilmengen von M wird mit $\mathrm{REC}(M)$ bezeichnet. Für ein genaueres Studium erkennbarer Mengen in allgemeinen Monoiden sei der Leser an [Eil74] und [Ber79] verwiesen. Im Falle des Spurmonoids $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ werden die Mengen in $\mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ auch als *erkennbare Spursprachen* bezeichnet. Die Menge $\mathrm{REC}(\Sigma^*)$ ist bekanntlich gleich der Menge aller regulären Sprachen über dem Alphabet Σ. Ist $\mathcal{A} = (Q, h, F)$ ein $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat, so ist der Monoidmorphismus h eindeutig durch die Werte $h(a)$ für $a \in \Sigma$ bestimmt. Also können wir $\mathcal{A}$ als ein endliches Objekt betrachten. Die folgenden zwei Lemmata sind bekannt, siehe z.B. Kapitel 6 in [DR95].

Lemma 2.3.1. Die folgenden Abschlußeigenschaften gelten:

(1) $\mathrm{REC}(M)$ ist abgeschlossen unter Booleschen Operationen.

(2) $\mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ ist effektiv abgeschlossen unter Booleschen Operationen und Konkatenation, d.h. für gegebene $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automaten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ könnnen $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automaten, welche die Sprachen $\mathbb{M}(\Sigma, I) \backslash L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$, $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$ und $L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$ erkennen, effektiv konstruiert werden.

(3) Ist $A \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ endlich, so gilt $A \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$, und ein $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat, welcher A erkennt, kann effektiv konstruiert werden.

(4) Ist $\Gamma \subseteq \Sigma$, so gilt $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \Gamma\} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$, und ein $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat, welcher diese Sprache erkennt, kann effektiv konstruiert werden.

Gilt jedoch $I \neq \emptyset$, so ist $\mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ nicht unter dem Kleeneschen Hüllenoperator abgeschlossen. Für $a\,I\,b$ ist etwa $\{[ab]_I\}^* = \{[a^n b^n]_I \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht erkennbar [DR95], S. 172.

Lemma 2.3.2. Das folgende Problem ist entscheidbar:
EINGABE: Ein $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat (Q, h, F).
FRAGE: Gilt $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Das folgende Lemma findet sich auch in [Dub86a], Theorem 4.1.

Lemma 2.3.3. Es sei $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets (Σ, D). Sei weiter $L_i \in \mathrm{REC}(\Sigma_i^*)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $L = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \pi_i(\boldsymbol{u}) \in L_i\} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$.

Beweis. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\mathcal{A}_i = (Q_i, h_i, F_i)$ ein Σ_i^*–Automat mit $L_i = L(\mathcal{A}_i)$, d.h. $L_i = h_i^{-1}(F_i)$. Sei $Q = \prod_{i=1}^n Q_i$, und sei $F = \prod_{i=1}^n F_i$. Der Monoidmorphismus $h : \mathbb{M}(\Sigma, I) \longrightarrow Q$ sei definiert durch $h(\boldsymbol{u}) = (h_1(\pi_1(\boldsymbol{u})), \ldots, h_n(\pi_n(\boldsymbol{u})))$ für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Wir behaupten, daß der $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat (Q, h, F) die Sprache L erkennt. Es gilt $\boldsymbol{u} \in h^{-1}(F)$ genau dann, wenn $(h_1(\pi_1(\boldsymbol{u})), \ldots, h_n(\pi_n(\boldsymbol{u}))) \in \prod_{i=1}^n F_i$ genau dann, wenn $\pi_i(\boldsymbol{u}) \in h_i^{-1}(F_i) = L_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{u} \in L$. $\square$

Das folgende Resultat von Ochmański [Och85] ist eine der zentralen Aussagen über erkennbare Spursprachen.

Satz 2.3.4. Die Menge $\mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ ist die (bezüglich Inklusion) kleinste Menge $\mathcal{L} \subseteq 2^{\mathbb{M}(\Sigma, I)}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Ist $L \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ endlich, so gilt $L \in \mathcal{L}$.
- Aus $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ folgt $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}$ und $L_1 L_2 \in \mathcal{L}$.
- Gilt $L \in \mathcal{L}$, und ist L zusammenhängend, so gilt auch $L^* \in \mathcal{L}$.

2.4 Kritische Paare

Für allgemeine Spurersetzungssysteme können überraschende Phänomene auftreten, die für Semi–Thue Systeme nicht auftreten können. Eines dieser Phänomene betrifft disjunkte linke Seiten. Sei $\mathcal{R}$ ein Semi–Thue System über dem Alphabet Σ, und seien $(\ell_0, r_0), (\ell_1, r_1) \in \mathcal{R}$ zwei Regeln. Angenommen das Wort $s \in \Sigma^*$ enthält zwei disjunkte Vorkommen von ℓ_0 und ℓ_1. Dann läßt sich s faktorisieren als $s = t\ell_0 u\ell_1 v$. Durch Anwendung der beiden Regeln erhalten wir die beiden Wörter $tr_0 u\ell_1 v$ und $t\ell_0 ur_1 v$. Diese beiden Wörter können natürlich durch Anwendung der jeweils anderen Regel in das Wort $tr_0 ur_1 v$ transformiert werden. Dieser triviale Sachverhalt gilt nun für Spurersetzungssysteme im allgemeinen nicht mehr. Die Anwendung einer Regel $\boldsymbol{\ell}_0 \to \boldsymbol{r}_0$ kann ein Vorkommen einer linken Seite $\boldsymbol{\ell}_1$, welches disjunkt von dem ersetzten Vorkommen von $\boldsymbol{\ell}_0$ ist, zerstören, wie das folgende Beispiel zeigt[1].

Beispiel 2.4.1. Sei $M = \mathbb{M}(\{a, b, c\}, \{(a, c), (c, a)\})$, und sei $\mathcal{R}_1$ das SES $\mathcal{R}_1 = \{c \to b, aa \to 1\}$ über M. In der Spur $[caa]_I = [aca]_I$ existieren eindeutig bestimmte disjunkte Vorkommen der linken Seiten c und aa. Es gilt jedoch $[aca]_I \to_{\mathcal{R}_1} aba$ und $[aca]_I = [caa]_I \to_{\mathcal{R}_1} c$, und das Paar (aba, c) ist nicht konfluent bezüglich $\to_{\mathcal{R}_1}$.

Ein zweites Beispiel ist das Ein–Regel SES $\mathcal{R}_2 = \{[ac]_I \to b\}$ über dem gleichen Spurmonoid. Sei $\boldsymbol{u} = [aacc]_I$. Numerieren wir in $[aacc]_I$ die unterschiedlichen Vorkommen von a und c in der Form $[a_1 a_2 c_1 c_2]_I$ durch, so erkennt man, daß in $\boldsymbol{u}$ vier verschiedene Vorkommen der linken Seite $[ac]_I$ existieren. Es gilt jedoch $[a_1 a_2 c_1 c_2]_I \to_{\mathcal{R}_2} a_1 b c_2$ und $[a_1 a_2 c_1 c_2]_I = [c_1 a_1 c_2 a_2]_I \to_{\mathcal{R}_2} c_1 b a_2$, und wieder ist das Paar (abc, cba) nicht konfluent bezüglich $\to_{\mathcal{R}_2}$.

Im folgenden geben wir eine Klasse von Spurersetzungssystemen an, für die das obige Phänomen nicht auftreten kann. Wir definieren hierzu die folgende technische Eigenschaft (A).

Ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ erfüllt die Bedingung (A), falls gilt:

(A1) Für alle $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ und alle $a \in \Sigma$ mit $a\, I\, \boldsymbol{\ell}$ gilt $a\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}a$.

(A2) Für alle $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und alle Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_i \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0, 1\}$, $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$ gilt: Es existieren Faktorisierungen $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1$ so, daß für alle $a \in \Sigma$ und $i \in \{0, 1\}$ gilt:
Aus $a\, I\, \boldsymbol{p}_i$ folgt $a\, I\, \boldsymbol{s}_i$, und aus $a\, I\, \boldsymbol{q}_i$ folgt $a\, I\, \boldsymbol{t}_i$.

[1] Wir verzichten auf die offensichtliche formale Definition eines Vorkommens einer Spur in einer anderen Spur.

Es ist zu beachten, daß ein SES $\mathcal{R}$, welches eine Regel der Form $1 \to \boldsymbol{r}$ mit $\boldsymbol{r} \neq 1$ enthält, nur dann die Bedingung (A1) erfüllt, falls $a\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}a$ für alle $a \in \Sigma$ gilt. Es ist leicht zu sehen, daß dies wiederum genau dann erfüllt ist, wenn aus $b \in alph(\boldsymbol{r})$ und $a \neq b$ schon $a\,I\,b$ folgt. Das SES $\mathcal{R}_1$ aus Beispiel 2.4.1 erfüllt die Bedingung (A1) für die Regel $c \to b$ nicht: Es gilt $a\,I\,c$ und $[ab]_I \neq [ba]_I$. Andererseits erfüllt $\mathcal{R}_1$ die Bedingung (A2). Das SES $\mathcal{R}_2$ aus dem gleichen Beispiel erfüllt die Bedingung (A1), aber es verletzt die Bedingung (A2): Wählen wir z.B. $\boldsymbol{p}_0 = a$, $\boldsymbol{q}_0 = c$, $\boldsymbol{p}_1 = c$ und $\boldsymbol{q}_1 = a$, so gilt $\boldsymbol{p}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0\,I\,\boldsymbol{q}_1$. Sei $\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0$ eine Faktorisierung der rechten Seite b. Es muß entweder $\boldsymbol{s}_0 = b$ oder $\boldsymbol{t}_0 = b$ gelten. Im ersten Fall gilt $c\,I\,\boldsymbol{p}_0$, aber es gilt nicht $c\,I\,\boldsymbol{s}_0$. Im zweiten Fall gilt $a\,I\,\boldsymbol{q}_0$, aber es gilt nicht $a\,I\,\boldsymbol{t}_0$. Andererseits ist es z.B. trivial, daß jedes löschende SES die Bedingung (A) erfüllt. Ein Semi–Thue System $\mathcal{R}$ über einem mindestens zweielementigen Alphabet erfüllt offensichtlich genau dann die Bedingung (A), wenn keine Regel der Form $1 \to r$ mit $r \neq 1$ in $\mathcal{R}$ existiert. Insbesondere erfüllt jedes längenreduzierende Semi–Thue System die Bedingung (A). Die Bedeutung von Bedingung (A) liegt im folgenden technischen Lemma.

Lemma 2.4.2. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (A) erfüllt. Seien $\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1 \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ und $(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$, wobei gilt:

$$\boldsymbol{p}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0\,I\,\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1\,I\,\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_1.$$

Dann ist das Paar $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0)$ 1–konfluent bezüglich $\to_{\mathcal{R}}$.

Beweis. Wir untersuchen zuerst den Fall, daß $\boldsymbol{p}_0 = 1$ gilt. Es muß also gezeigt werden, daß das Paar $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0)$ 1–konfluent ist. Wegen $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r}_0$ gilt $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0$. Wir behaupten, daß auch $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0$ gilt. Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (A1) erfüllt, folgt aus $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\,I\,\boldsymbol{q}_0$ und $(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{r}_0) \in \mathcal{R}$, daß $\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{r}_0$ gilt. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 &= \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{r}_0 && (\text{da } \boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{r}_0) \\
&= \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0 && (\text{da } \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1 \text{ und } \boldsymbol{w}_1\,I\,\boldsymbol{q}_1) \\
&\to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Argumentation ist möglich, wenn eine der Spuren $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{p}_1$ oder $\boldsymbol{q}_1$ leer ist. Im folgenden können wir also annehmen, daß $\boldsymbol{p}_i \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0, 1\}$ gilt. Aus Bedingung (A2) folgt, daß es Faktorisierungen $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1$ gibt so, daß für alle $a \in \Sigma$ und $i \in \{0, 1\}$ gilt: $a\,I\,\boldsymbol{p}_i$ impliziert

$a \, I \, \boldsymbol{s}_i$ und $a \, I \, \boldsymbol{q}_i$ impliziert $a \, I \, \boldsymbol{t}_i$. Insbesondere muß $\boldsymbol{p}_1 \, I \, \boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{q}_1 \, I \, \boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{t}_1$ gelten. Außerdem gilt $\boldsymbol{s}_1 \, I \, \boldsymbol{s}_0$ wegen $\boldsymbol{p}_1 \, I \, \boldsymbol{s}_0$, sowie $\boldsymbol{t}_1 \, I \, \boldsymbol{t}_0$ wegen $\boldsymbol{q}_1 \, I \, \boldsymbol{t}_0$. Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{t}_0 \to_{\mathcal{R}} \\ \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{t}_1\end{aligned}$$

sowie $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{t}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{t}_1$.
□

Wie schon in Abschnitt 1.5 angedeutet, existiert für jedes Semi–Thue System $\mathcal{R}$ eine endliche Menge von sogenannten kritischen Paaren mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{R}$ genau dann lokal konfluent ist, wenn alle kritischen Paare konfluent sind. Diese kritischen Paare resultieren aus überlappenden linken Seiten von Regeln. In [Die90a], siehe auch [Die90b] S. 120, wurde der Begriff des kritischen Paares auf Spurersetzungssysteme verallgemeinert. Mit der dort eingeführten Definition wird jedoch jedem SES eine im allgemeinen unendliche Menge von kritischen Paaren zugeordnet. Dies ist jedoch keine Unzulänglichkeit der in [Die90a] angegebenen Definition, sondern eine prinzipielle Einschränkung, da wie bereits in Abschnitt 1.5 bemerkt wurde, Spurmonoide existieren, für die Konfluenz bereits für längenreduzierende Spurersetzungssysteme unentscheidbar ist. In diesem Abschnitt geben wir eine geringfügig von [Die90a] abweichende Definition eines kritischen Paares an. Im Gegensatz zu [Die90a] lassen sich die hier eingeführten kritischen Paare nur für Spurersetzungssysteme, welche die Bedingung (A) erfüllen, zur Überprüfung der Konfluenz einsetzen. Diese Einschränkung ist aus den konkreten Anwendungssituationen in den späteren Kapiteln dieser Arbeit motiviert. Jedoch führt auch die im folgenden angegebene Definition im allgemeinen auf eine unendliche Menge von kritischen Paaren.

Definition 2.4.3. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$. Die Menge $\mathrm{CS}(\mathcal{R})$ aller *kritischen Situationen* von $\mathcal{R}$ ist die Menge aller Tripel $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1)$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen: Es existieren Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und sieben Spuren $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{w}_i$ $(i \in \{0,1\})$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$ mit:

(1) $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1,$

(2) $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{s} \, I \, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_0\boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_1$

(3) Für $i \in \{0,1\}$ existiert kein $a \in min(\boldsymbol{w}_i)$ mit $a\,I\,\boldsymbol{p}_i$, und es existiert kein $b \in max(\boldsymbol{w}_i)$ mit $b\,I\,\boldsymbol{q}_{1-i}$.

(4) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$,[2]
$\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$

Wir sagen, daß diese kritische Situation von den Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0)$ und $(\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1)$ *erzeugt* wird. Die Menge $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ aller *kritischen Paare* von $\mathcal{R}$ ist definiert als $\mathrm{CP}(\mathcal{R}) = \{(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1) \mid \exists \boldsymbol{t} : (\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})\}$. Die Menge $\mathrm{CT}(\mathcal{R})$ aller *kritischen Spuren* von $\mathcal{R}$ ist $\mathrm{CT}(\mathcal{R}) = \{\boldsymbol{t} \mid \exists \boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1 : (\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})\}$.

Das folgende Lemma entspricht Theorem 3.3 aus [Die90a].

Lemma 2.4.4. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (A) erfüllt. Dann ist $\mathcal{R}$ lokal konfluent (bzw. α–konfluent) genau dann, wenn alle Paare in $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ konfluent (bzw. α–konfluent) sind.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (A) erfüllt. Offensichtlich gilt $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_1$ für alle $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$. Dies beweist bereits eine Richtung des Lemmas. Zum Beweis der anderen Richtung nehmen wir an, daß alle Paare in $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ konfluent (bzw. α–konfluent) sind und betrachten drei Spuren $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t}_1$ mit $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_1$. Wir müssen zeigen, daß das Paar $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1)$ konfluent (bzw. α–konfluent) ist.

Zunächst müssen Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Spuren $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{u}_0\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1$ existieren. Lemma 2.2.2 angewandt auf die Identität $\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{v}_1$ ergibt neun Spuren $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{y}_i$ $(i \in \{0,1\})$ und $\boldsymbol{s}$ mit

- $\boldsymbol{\ell}_i = \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_i, \quad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_{1-i}\boldsymbol{w}_{1-i}, \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i\boldsymbol{q}_{1-i}\boldsymbol{y}_1 \quad (i \in \{0,1\})$,
- $\boldsymbol{p}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0\,I\,\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{s}\,I\,\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1\,I\,\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_1$,

siehe auch das folgende Diagramm:

$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{w}_1$	$\boldsymbol{q}_0$	$\boldsymbol{y}_1$
$\boldsymbol{\ell}_1$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{q}_1$
$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{y}_0$	$\boldsymbol{p}_0$	$\boldsymbol{w}_0$
	$\boldsymbol{u}_0$	$\boldsymbol{\ell}_0$	$\boldsymbol{v}_0$

[2] Es ist zu beachten, daß die Gleichheit der zwei für $\boldsymbol{t}$ angegebenen Faktorisierungen aus den in Punkt (1) aufgelisteten Unabhängigkeiten folgt.

Wir müssen zeigen, daß das Paar

$$(\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{y}_1) \tag{2.1}$$

konfluent (bzw. α–konfluent) ist. Hierfür genügt es zu zeigen, daß das Paar

$$(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0) \tag{2.2}$$

konfluent (bzw. α–konfluent) ist, denn die Konfluenz (α–Konfluenz) des Paares in (2.2) impliziert die Konfluenz (α–Konfluenz) des Paares in (2.1). Gilt $\boldsymbol{s} = 1$, d.h. $\boldsymbol{\ell}_i = \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0,1\}$, so ist das Paar (2.2) wegen Lemma 2.4.2 1–konfluent. Sei nun $\boldsymbol{s} \neq 1$. Wir zeigen, daß für alle $\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1 \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit $\boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{s}\, I\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{w}_1\, I\, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_1$ das Paar in (2.2) konfluent (bzw. α–konfluent) ist. Dies beweisen wir durch eine Induktion über $|\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1|$:

Zunächst behandeln wir den Fall, daß kein $a \in min(\boldsymbol{w}_i)$ mit $a\, I\, \boldsymbol{p}_i$ und kein $b \in max(\boldsymbol{w}_i)$ mit $b\, I\, \boldsymbol{q}_{1-i}$ für $i \in \{0,1\}$ existiert, welcher auch den Fall $|\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1| = 0$ einschließt. Dann liegt das Paar in (2.2) in $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ und ist damit konfluent (α–konfluent).

Wir können nun o.B.d.A. annehmen, daß z.B. $\boldsymbol{w}_0 = a\boldsymbol{w}$ und $a\, I\, \boldsymbol{p}_0$ für ein $a \in \Sigma$ gilt[3]. Aus $\boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ folgt $a\, I\, \boldsymbol{\ell}_0$. Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (A1) erfüllt folgt $a\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0 a$. Daher gilt $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0 a\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1 = a\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{p}_0 a\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = a\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$. Da $\boldsymbol{w}$ mindestens die gleichen Unabhängigkeiten wie $\boldsymbol{w}_0 = a\boldsymbol{w}$ erfüllt, folgt aus der Induktionshypothese, daß das Paar $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0)$ konfluent (α–konfluent) ist. Dann ist aber auch das Paar $(a\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1, a\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0)$ konfluent (α–konfluent). □

Ist also $\mathcal{R}$ ein terminierendes SES, welches die Bedingung (A) erfüllt, so genügt es zur Überprüfung der Konfluenz von $\mathcal{R}$ alle kritischen Paare auf Konfluenz zu überprüfen. Sei $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1)$ eine kritische Situation von $\mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ terminierend ist, können wir eine (beliebige) Normalform $\boldsymbol{u}_i$ von $\boldsymbol{t}_i$ berechnen. Gilt $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_1$, so ist das kritische Paar $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1)$ natürlich konfluent. Gilt andererseits $\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{u}_1$, so kann $\mathcal{R}$ nicht konfluent sein, denn es gilt

$$\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}_0 \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}_1 \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R}).$$

Beispiel 2.4.5. Wir wollen Lemma 2.4.4 benutzen, um zu zeigen, daß das löschende SES $\mathcal{R} = \{ba \to 1, ab \to 1, c \to 1\}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\{a,b,c\}, \{(a,c),(c,a)\})$ konfluent ist. Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) erfüllt,

[3] Die anderen Fälle können analog behandelt werden.

können wir Lemma 2.4.4 anwenden. Seien $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ linke Seiten von $\mathcal{R}$, wobei $\boldsymbol{s} \neq 1$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$ gilt. Falls wir den trivialen Fall $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\ell}_1$ ausschließen, bleiben nur noch die folgenden zwei Fälle übrig.
Fall 1: $\boldsymbol{\ell}_0 = ab$, $\boldsymbol{\ell}_1 = ba$, $\boldsymbol{s} = b$, $\boldsymbol{p}_0 = a = \boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{p}_1 = 1 = \boldsymbol{q}_0$:
Wir müssen alle Paare $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0) = (\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_0 a, a\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1)$ betrachten, wobei unter anderem $\boldsymbol{s} \, I \, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1$ gelten muß. Wegen $\boldsymbol{s} = b$ impliziert dies $\boldsymbol{w}_0 = 1 = \boldsymbol{w}_1$. Daher muß nur das Paar (a, a) betrachtet werden, welches trivialerweise konfluent ist.
Fall 2: $\boldsymbol{\ell}_0 = ba$, $\boldsymbol{\ell}_1 = ab$, $\boldsymbol{s} = a$, $\boldsymbol{p}_0 = b = \boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{p}_1 = 1 = \boldsymbol{q}_0$:
Wir müssen alle Paare $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0) = (\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_0 b, b\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1)$ betrachten, wobei unter anderem $\boldsymbol{s} \, I \, \boldsymbol{w}_0$ und $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0$ gilt. Aus $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0$, d.h. $\boldsymbol{w}_1 \, I \, b$, folgt $\boldsymbol{w}_1 = 1$. Aus $\boldsymbol{s} \, I \, \boldsymbol{w}_0$, d.h. $a \, I \, \boldsymbol{w}_0$, folgt $\boldsymbol{w}_0 = c^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen somit für alle $n \in \mathbb{N}$ das Paar $(c^n b, bc^n)$ betrachten, welches offensichtlich wegen der Regel $c \to 1$ konfluent ist.

Für das freie Monoid Σ^* liefert Definition 2.4.3 die übliche Definition kritischer Paare für Semi–Thue Systeme [NB72] (falls man von der Einschränkung $\ell_0 \neq 1 \neq \ell_1$ absieht):

Lemma 2.4.6. Sei $\mathcal{R}$ ein Semi–Thue System über Σ. Die Menge $\mathrm{CS}(\mathcal{R})$ besteht aus allen Tripeln (t_0, t, t_1), wobei das folgende gilt: Es existieren Regeln $(\ell_0, r_0), (\ell_1, r_1) \in \mathcal{R}$ mit $\ell_0 \neq 1 \neq \ell_1$ so, daß einer der beiden folgenden Fälle gilt:

- Es existieren $u, v \in \Sigma^*$ mit $t = \ell_0 = u\ell_1 v$, $t_0 = r_0$ und $t_1 = ur_1 v$.
- Es existieren $u, v \in \Sigma^*$ mit $t = \ell_0 v = u\ell_1$, $t_0 = r_0 v$, $t_1 = ur_1$ und $|\ell_0| > |u|$.

Tritt einer der beiden Fälle des obigen Lemmas auf, so sagen wir auch, daß das Wort t eine *Überlappung* der Wörter ℓ_0 und ℓ_1 darstellt, siehe die folgende Graphik:

<table>
<tr><td colspan="3">$\ell_0 \neq 1$</td></tr>
<tr><td>u</td><td>$\ell_1 \neq 1$</td><td>v</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>u</td><td colspan="2">$\ell_1 \neq 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell_0 \neq 1$</td><td>v</td></tr>
</table>

2.5 Kodieren von Spurersetzungssystemen

Ist $\sigma : M \longrightarrow M'$ ein Monoidmorphismus zwischen den Spurmonoiden M und M', und ist $\mathcal{R}$ ein SES über M, so können wir ein SES $\sigma(\mathcal{R})$ über M'

durch $\sigma(\mathcal{R}) = \{\sigma(\boldsymbol{\ell}) \to \sigma(\boldsymbol{r}) \mid (\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}\}$ definieren. Im allgemeinen ist es natürlich möglich, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist, jedoch $\sigma(\mathcal{R})$ nicht konfluent ist, oder umgekehrt. Für das terminierende und konfluente Semi–Thue System $\mathcal{R} = \{a \to b\}$ und den injektiven Morphismus σ mit $\sigma(a) = aa$ und $\sigma(b) = b$ ist z.B. $\sigma(\mathcal{R}) = \{aa \to b\}$ nicht konfluent. Bildet andererseits der Morphismus σ jedes Symbol auf die leere Spur ab, so ist $\sigma(\mathcal{R})$ für jedes SES $\mathcal{R}$ konfluent. Das folgende Lemma gibt Bedingungen an, die diese Möglichkeit ausschließen.

Lemma 2.5.1. Sei $\sigma : M \longrightarrow M'$ ein Monoidmorphismus zwischen den Spurmonoiden M und M', und sei $\mathcal{R}$ ein SES über M. Weiter gelten die folgenden Bedingungen.

(1) σ ist injektiv.

(2) $\sigma(\mathcal{R})$ ist terminierend und erfüllt die Bedingung (A).

(3) Gilt $\boldsymbol{\ell} \in \mathit{dom}(\mathcal{R})$ und $\sigma(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{u}'\sigma(\boldsymbol{\ell})\boldsymbol{v}'$, so existieren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ mit $\boldsymbol{u}' = \sigma(\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v})$.

(4) Gilt $\boldsymbol{t}' \in \mathrm{CT}(\sigma(\mathcal{R}))$, so existiert ein $\boldsymbol{t} \in M$ mit $\boldsymbol{t}' = \sigma(\boldsymbol{t})$.

Dann gilt folgendes:

- $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ genau dann, wenn $\sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \sigma(\boldsymbol{t})$.
- $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent ist.

Beweis. Sei $\sigma : M \longrightarrow M'$ ein Monoidmorphismus zwischen den Spurmonoiden M und M', und sei $\mathcal{R}$ ein SES über M, welches die vier Bedingungen aus dem Lemma erfüllt. Zunächst zeigen wir die erste Behauptung des Lemmas. Aus $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ folgt offensichtlich $\sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \sigma(\boldsymbol{t})$, da σ ein Monoidmorphismus ist. Gilt nun $\sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \sigma(\boldsymbol{t})$, so folgt die Behauptung $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ aus der folgenden allgemeineren Aussage sowie der Injektivität von σ:

$$\text{Gilt } \sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \boldsymbol{t}', \text{ so existiert ein } \boldsymbol{t} \in M \text{ mit } \boldsymbol{t}' = \sigma(\boldsymbol{t}) \text{ und } \boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}. \tag{2.3}$$

Sei hierzu $\sigma(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{u}'\sigma(\boldsymbol{\ell})\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{u}'\sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}'$ für eine Regel $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$. Bedingung (3) aus dem Lemma impliziert, daß $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ mit $\boldsymbol{u}' = \sigma(\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v})$ existieren. Es gilt also $\sigma(\boldsymbol{s}) = \sigma(\boldsymbol{u\ell v})$ und daher $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u\ell v}$, da σ injektiv ist. Es folgt $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{urv}$ und $\sigma(\boldsymbol{urv}) = \boldsymbol{u}'\sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{t}'$, was (2.3) beweist.

Sei nun $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent, und seien $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \in M$ so, daß $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$ gilt. Da σ ein Monoidmorphismus ist, folgt $\sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \sigma(\boldsymbol{t})$ und $\sigma(\boldsymbol{s}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \sigma(\boldsymbol{u})$. Da $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent ist, existiert ein $\boldsymbol{v}' \in M'$ mit $\sigma(\boldsymbol{t}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \boldsymbol{v}'$ und $\sigma(\boldsymbol{u}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \boldsymbol{v}'$. Eine induktive Erweiterung von (2.3) liefert $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in M$ mit $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v}_2)$, $\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}_2$. Schließlich folgt noch $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ aus $\sigma(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v}_2)$ und der Injektivität von σ. Also ist $\mathcal{R}$ konfluent. Es ist zu beachten, daß wir bisher die Annahmen (2) und (4) aus dem Lemma nicht benötigt haben.

Sein nun $\mathcal{R}$ konfluent. Wir wollen zeigen, daß dann auch $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent ist. Da $\sigma(\mathcal{R})$ terminierend ist, genügt es zu zeigen, daß $\sigma(\mathcal{R})$ lokal konfluent ist. Da weiter $\sigma(\mathcal{R})$ die Bedingung (A) erfüllt, genügt es zu zeigen, daß alle kritischen Paare konfluent sind. Sei $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{t}', \boldsymbol{v}') \in \mathrm{CS}(\sigma(\mathcal{R}))$. Wegen der vierten Bedingung aus dem Lemma existiert ein $\boldsymbol{t} \in M$ mit $\boldsymbol{t}' = \sigma(\boldsymbol{t})$. Es folgt $\sigma(\boldsymbol{t}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \boldsymbol{u}'$ und $\sigma(\boldsymbol{t}) \to_{\sigma(\mathcal{R})} \boldsymbol{v}'$. Aus (2.3) folgt, daß $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ mit $\boldsymbol{u}' = \sigma(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v})$ und $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$ existieren. Da $\mathcal{R}$ konfluent ist, existiert ein $\boldsymbol{w} \in M$ mit $\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}$. Dies impliziert $\boldsymbol{u}' = \sigma(\boldsymbol{u}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \sigma(\boldsymbol{w})$ und $\boldsymbol{v}' = \sigma(\boldsymbol{v}) \to_{\sigma(\mathcal{R})}^* \sigma(\boldsymbol{w})$. Also ist $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent. $\square$

Im restlichen Abschnitt betrachten wir den Fall eines freien Monoids. Üblicherweise wird in der formalen Sprachtheorie ein Alphabet $\Sigma = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $n > 2$ in das zweistellige Alphabet $\{a, b\}$ mittels des Monoidmorphismuses ϕ, der durch $\phi(b_i) = ab^i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiert ist, kodiert. Für unsere Zwecke ist diese Kodierung jedoch ungeeignet. Betrachtet man z.B. das offensichtlich konfluente Semi–Thue System $\mathcal{R} = \{b_1 \to 1, b_2 \to 1\}$ über Σ, so ist $\phi(\mathcal{R}) = \{ab \to 1, abb \to 1\}$ nicht mehr konfluent, denn es gilt $abb \to_{\phi(\mathcal{R})} b$ und $abb \to_{\phi(\mathcal{R})} 1$. In der Tat erfüllt z.B. ϕ nicht die dritte Bedingung aus Lemma 2.5.1. Wir benötigen offensichtlich eine Kodierungsfunktion, die keine neuen Überlappungen zwischen linken Seiten erzeugt. Das nächste Lemma gibt eine solche Kodierungsfunktion ϕ an. Dabei ist es für spätere Zwecke hilfreich, zusätzliche Symbole $a_1, \ldots, a_m$ zu Σ hinzuzufügen, welche unter ϕ auf sich selbst abgebildet werden.

Lemma 2.5.2. Seien $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}$, $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2\}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ gilt. Wir definieren den Monoidmorphismus $\phi : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ durch

$$\phi(a_i) = a_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ und } \phi(b_i) = b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2} \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dann gilt folgendes:

(1) ϕ ist injektiv.

(2) Falls $\phi(s) = s_1\phi(\ell)s_2$ und $\ell \neq 1$ gilt, so existieren $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $s_1 = \phi(u_1)$, $s_2 = \phi(u_2)$ und $s = u_1\ell u_2$.

(3) Falls $\phi(\ell_1) = s_1 s$ und $\phi(\ell_2) = s s_2$ gilt, so existieren $u, u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $\ell_1 = u_1 u$, $\ell_2 = u u_2$, $\phi(u) = s$, $\phi(u_1) = s_1$ und $\phi(u_2) = s_2$.

Es ist zu beachten, daß ϕ so gewählt wurde, daß $|\phi(b_i)| = n + 5$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Beweis. Die Injektivität von ϕ ist offensichtlich. Es gilt allgemeiner die folgende Kürzungseigenschaft, welche durch Induktion über $|t|$ bewiesen werden kann:

$$\text{Aus } \phi(s) = \phi(t)u \text{ (bzw. } \phi(s) = u\phi(t)\text{) folgt} \\ s = tv \text{ (bzw. } s = vt\text{) und } u = \phi(v) \text{ für ein } v \in \Sigma^*. \quad (2.4)$$

Gelte nun $\phi(s) = s_1\phi(\ell)s_2$ und $\ell \neq 1$. Wir zeigen zunächst, daß ein $u_1 \in \Sigma^*$ mit $s_1 = \phi(u_1)$ existiert. Zu diesem Zweck wählen wir eine Faktorisierung der Form $s_1 = \phi(u)t$, wobei u maximale Länge unter allen solchen Faktorisierungen haben soll. Diese Faktorisierung existiert, da $s_1 = \phi(1)s_1$ gilt. Es folgt $\phi(s) = \phi(u)t\phi(\ell)s_2$. Aus (2.4) folgt, daß ein $v \in \Sigma^*$ mit $t\phi(\ell)s_2 = \phi(v)$ und $v \neq 1$ (wegen $\ell \neq 1$) existiert. Wir behaupten, daß $t = 1$ gilt, was $s_1 = \phi(u)$ impliziert. Angenommen es gilt $t \neq 1$. Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich des ersten Symbols von $v \in \Sigma^+$ durch.
1. Fall: $v = a_i w$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$: Es folgt $t = a_i t'$ und daher $s_1 = \phi(u)a_i t' = \phi(ua_i)t'$. Dies widerspricht jedoch der Maximalität von u.
2.Fall: $v = b_i w$ für ein $i \in \{1, \ldots n\}$: Es folgt $t\phi(\ell)s_2 = b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2}\phi(w)$. Aus der Maximalität von u folgt, daß t ein echter Präfix von $b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2}$ ist, siehe die folgende Graphik:

$t \neq 1$	$\phi(\ell) \neq 1$	s_2
$b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2}$	$\phi(w)$	

Die Fälle $t = b_1$ und $t = b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^j$ für ein $0 \leq j < n - i + 2$ können wir ausschließen, da diese $\phi(\ell) = b_2 \cdots$ implizieren[4], was jedoch der Definition von ϕ widerspricht. Den Fall $t = b_1 b_2 b_1^j$ für ein $0 \leq j < i$ können wir ebenfalls

[4] Hier ist wichtig, daß $\ell \neq 1$ und damit auch $\phi(\ell) \neq 1$ gilt.

ausschließen, da dies $\phi(\ell) = b_1 b_1 \cdots$ impliziert. Gilt schließlich $t = b_1 b_2 b_1^i$, so folgt $\phi(\ell) = b_1 b_2 b_2 \cdots$, was wieder nicht möglich ist. Es muß somit $t = 1$ gelten. Also gilt wie gewünscht $s_1 = \phi(u)$. Es folgt weiter $\phi(s) = \phi(u\ell)s_2$. Aus (2.4) folgt somit, daß ein $u_2 \in \Sigma^*$ mit $\phi(u_2) = s_2$ existiert.

Wir beweisen nun die Aussage (3) des Lemmas. Gelte $s_1 s = \phi(\ell_1)$ und $ss_2 = \phi(\ell_2)$. Es genügt $s = \phi(u)$ für ein $u \in \Sigma^*$ zu zeigen, denn dies impliziert $s_1\phi(u) = \phi(\ell_1)$ und $\phi(u)s_2 = \phi(\ell_2)$. Aus (2.4) folgt dann, daß $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $s_1 = \phi(u_1)$, $s_2 = \phi(u_2)$, $\ell_1 = u_1 u$ und $\ell_2 = uu_2$ existieren. Die Existenz eines u mit $s = \phi(u)$ kann wie folgt bewiesen werden. Zunächst wählen wir eine Faktorisierung der Form $s = \phi(u)v$, wobei u unter allen solchen Faktorisierungen maximale Länge habe. Es folgt $ss_2 = \phi(u)vs_2 = \phi(\ell_2)$ und daher nach (2.4) $vs_2 = \phi(w)$ für ein $w \in \Sigma^*$. Wir behaupten, daß $v = 1$ gilt. Angenommen es gilt $v \neq 1$ und daher auch $w \neq 1$. Gilt $w = a_i \cdots$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, so folgt $v = a_i \cdots$, was der Maximalität von u widerspricht. Also gilt $w = b_i \cdots$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und daher $vs_2 = b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2} \cdots$. Wegen der Maximalität von u muß v ein echter Präfix von $b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2}$ sein. Dies ergibt jedoch mit $v \neq 1$ einen Widerspruch, da v auch ein Suffix von $\phi(\ell_1) = s_1 s = s_1\phi(u)v$ ist. $\square$

In Worten formuliert sagt Lemma 2.5.2 das folgende aus: Jede Überlappung zweier linker Seiten $\phi(\ell_1)$ und $\phi(\ell_2)$ resultiert aus einer Überlappung von ℓ_1 und ℓ_2. Ist $\mathcal{R}$ ein Semi–Thue System mit $1 \notin dom(\mathcal{R})$, so folgt also aus Lemma 2.4.6, daß für $\mathcal{R}$ und die Kodierungsfunktion ϕ die Bedingungen (1), (3) und (4) aus Lemma 2.5.1 gelten. Weiter gilt $|\phi(b_i)| = n+5$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ist also $m = 0$ in Lemma 2.5.2 und ist $\mathcal{R}$ längenreduzierend (was $1 \notin dom(\mathcal{R})$ impliziert), so ist auch das Semi–Thue System $\phi(\mathcal{R})$ längenreduzierend und erfüllt damit auch die Bedingung (A). Das folgende Lemma ergibt sich somit unmittelbar aus Lemma 2.5.1.

Lemma 2.5.3. Sei $\mathcal{R}$ ein längenreduzierendes Semi–Thue System über dem Alphabet $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Der Monoidmorphismus $\phi : \{b_1, \ldots, b_n\}^* \longrightarrow \{a, b\}^*$ sei definiert durch $\phi(b_i) = aba^{i+1}b^{n-i+2}$. Dann gilt folgendes:

- $s \to_{\mathcal{R}} t$ genau dann, wenn $\phi(s) \to_{\phi(\mathcal{R})} \phi(t)$.
- $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\phi(\mathcal{R})$ konfluent ist.

Kapitel 3

Längenreduzierende Systeme

In diesem Kapitel untersuchen wir längenreduzierende Spurersetzungssysteme. Das Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte. Im ersten Abschnitt zeigen wir, daß das Konfluenzproblem für längenreduzierende Semi–Thue Systeme über einem mindestens zweielementigen Alphabet P–vollständig ist. Daran anschließend beweisen wir, daß das Konfluenzproblem für längenreduzierende Vektorersetzungssysteme PSPACE–vollständig ist. Schließlich zeigen wir, daß für alle verbleibenden Fälle, d.h. für alle Spurmonoide, die weder frei noch frei kommutativ sind, das Konfluenzproblem für längenreduzierende Spurersetzungssysteme unentscheidbar ist.

3.1 Längenreduzierende Semi–Thue Systeme

In [BO81] wurde gezeigt, daß sich das Konfluenzproblem für längenreduzierende Semi–Thue Systeme in P befindet. Nach dem Kenntnisstand des Autors ist der beste bekannte Algorithmus für dieses Problem der $O(n^3)$–Algorithmus aus [KKMN85]. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß für jedes Alphabet Γ mit $|\Gamma| > 1$ das Entscheidungsproblem KOLR(Γ^*) P–vollständig unter AC^0–Reduktionen ist. Es ist somit sehr unwahrscheinlich, daß sich das Problem KOLR(Γ^*) effizient parallelisieren läßt. Dies ist einerseits nicht sehr überraschend, da die Anwendung einer Folge von Wortersetzungsregeln ein inhärent sequentieller Vorgang zu sein scheint. Andererseits werden wir jedoch in Abschnitt 4.1 zeigen, daß sich das Problem KOMO(Γ^*) effizient parallelisieren läßt.

(1a) $q_f x \to q_f$ für alle $x \in \Gamma$	
(1b) $x q_f \to q_f$ für alle $x \in \Gamma$	
Für alle $i \in \{1, \ldots, m+1\}$:	
(2a) $\alpha q^{3i} \lhd \to \alpha b_l p^{3(i-1)} \lhd$	falls $\delta(q, \Box) = (p, b, R)$, $\alpha \in \Sigma_l \cup \{\rhd\}$
(2b) $\alpha q^{3i} a_r \to \alpha b_l p^{3(i-1)}$	falls $\delta(q, a) = (p, b, R)$, $\alpha \in \Sigma_l \cup \{\rhd\}$
(2c) $c_l q^{3i} \lhd \to p^{3(i-1)} c_r b_r \lhd$	falls $\delta(q, \Box) = (p, b, L)$, $c \in \Sigma$
(2d) $\rhd q^{3i} \lhd \to \rhd p^{3(i-1)} \Box_r b_r \lhd$	falls $\delta(q, \Box) = (p, b, L)$
(2e) $c_l q^{3i} a_r \to p^{3(i-1)} c_r b_r$	falls $\delta(q, a) = (p, b, L)$, $c \in \Sigma$
(2f) $\rhd q^{3i} a_r \to \rhd p^{3(i-1)} \Box_r b_r$	falls $\delta(q, a) = (p, b, L)$

Abbildung 3.1: Das Semi–Thue System $\mathcal{P}$ aus dem Beweis von Satz 3.1.2. Es ist zu beachten, daß $q \neq q_f$ in (2a) bis (2f) gilt.

Satz 3.1.1. Für jedes endliche Alphabet Γ mit $|\Gamma| > 1$ ist KOLR(Γ^*) P–vollständig unter AC^0–Reduktionen.

Bevor wir Satz 3.1.1 beweisen, werden wir zunächst das Wortproblem für konfluente und längenreduzierende Semi–Thue Systeme untersuchen.

Satz 3.1.2. Das uniforme Wortproblem für konfluente und längenreduzierende Semi–Thue Systeme über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist P–vollständig unter AC^0–Reduktionen.

Beweis. In [Boo82] wurde gezeigt, daß sich das Wortproblem für konfluente und längenreduzierende Semi–Thue Systeme in P befindet. Die P–Härte zeigen wir durch eine Reduktion vom *Generic Machine Simulation Problem* (kurz GMSP, siehe auch [GHR95]), welches bekanntlich P–vollständig unter AC^0–Reduktionen ist [GHR95]. GMSP ist das folgende Entscheidungsproblem:
EINGABE: Eine deterministische Turing–Maschine $M = (Q, \Sigma, \Box, \delta, q_0, q_f)$, eine Eingabe $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^*$ für $\mathcal{M}$ und ein Wort $t \in \{\#\}^*$, wobei $\#$ ein neues Symbol ist, welches nicht in der Beschreibung von $\mathcal{M}$ auftaucht.
FRAGE: Terminiert die Maschine $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w nach höchstens $|t|$ Schritten?

Sei nun $(\mathcal{M}, w, \#^m)$ eine GMSP–Instanz, wobei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Box, \delta, q_0, q_f)$ eine deterministische Turing–Maschine ist, und $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^*$ eine Eingabe für $\mathcal{M}$ ist. Es ist zu beachten, daß $\mathcal{M}$ genau dann terminiert, wenn $\mathcal{M}$ den Endzustand q_f erreicht. Seien $\Sigma_l = \{a_l \mid a \in \Sigma\}$ und $\Sigma_r = \{a_r \mid a \in \Sigma\}$ zwei disjunkte Kopien von Σ mit $\Sigma_l \cap Q = \emptyset = \Sigma_r \cap Q$. Für ein Wort $s \in \Sigma^*$ sind die Wörter s_l und s_r auf die offensichtliche Weise definiert. Seien weiter $\triangleright$ und $\triangleleft$ Symbole mit $\triangleright, \triangleleft \notin Q \cup \Sigma_l \cup \Sigma_r$, die das linke bzw. rechte Ende des beschriebenen Bandinhalts begrenzen. Schließlich ist $\Gamma = Q \cup \Sigma_l \cup \Sigma_r \cup \{\triangleright, \triangleleft\}$. Wir definieren nun das Semi–Thue System $\mathcal{P}$ über Γ durch die Regeln in Abbildung 3.1. Die Regeln (2a) bis (2f) simulieren die Maschine $\mathcal{M}$, während die Regeln (1a) und (1b) den Endzustand q_f zu einem absorbierenden Symbol machen. Es ist zu beachten, daß in den Simulationsregeln (2a) bis (2f) das Zustandssymbol $3i$–mal in der linken Seite vorkommt aber nur $3(i-1)$–mal in der rechten Seite vorkommt. Dies hat den Effekt, daß $\mathcal{P}$ längenreduzierend ist[1]. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{M}$ und $\#^m$ in AC^0 berechnet werden kann. Dafür ist es jedoch wichtig, daß die Schranke m in der Form $\#^m$ unär kodiert wird und nicht binär repräsentiert wird, da $\|\mathcal{P}\|$ exponentiell in $bit(m)$ wächst.

Behauptung 1: Das Semi–Thue System $\mathcal{P}$ ist längenreduzierend und konfluent. Außerdem gilt $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow_{\mathcal{P}}^* q_f$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ auf der Eingabe $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^*$ nach höchstens m Schritten terminiert.

Die Konfluenz von $\mathcal{P}$ ist offensichtlich: Da $\mathcal{M}$ deterministisch ist, erzeugen die Regeln (2a) bis (2f) keine kritischen Situationen. Da in den Regeln (2a) bis (2f) außerdem $q \neq q_f$ gilt, sind somit nur kritische Paare der Form $(q_f \ell, q_f r)$ und $(\ell q_f, r q_f)$, wobei $x\ell \rightarrow r$ bzw. $\ell x \rightarrow r$ für ein $x \in \Gamma$ eine Regel aus $\mathcal{P}$ ist, zu betrachten. Da q_f absorbierend ist, sind solche kritischen Paare konfluent. Nehmen wir nun an, daß $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w nicht nach höchstens m Schritten terminiert. Indem wir $m+1$ Schritte von $\mathcal{M}$ simulieren, erhalten wir $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow_{\mathcal{P}}^{m+1} \triangleright u_l v_r \triangleleft$, wobei $u, v \in \Sigma^*$ gilt. Das Wort $\triangleright u_l v_r \triangleleft$ ist irreduzibel bezüglich $\mathcal{P}$. Da q_f auch irreduzibel ist, und $\mathcal{P}$ konfluent ist, kann somit nicht auch $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow_{\mathcal{P}}^* q_f$ gelten. Terminiert andererseits $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w nach höchstens m Schritten, so existieren $j > 0$ und $u, v \in \Sigma^*$ mit $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow_{\mathcal{P}}^* \triangleright u_l q_f^{3j} v_r \triangleleft$. Durch Anwendung der Regeln (1a) und (1b) kann das Wort $\triangleright u_l q_f^{3j} v_r \triangleleft$ auf q_f reduziert werden. Behauptung 1 ist somit bewiesen.

Wir müssen nun noch das Alphabet Γ in das zweielementige Alphabet $\{a, b\}$ kodieren. Sei hierzu ϕ die Kodierungsfunktion aus Lemma 2.5.3, wobei wir dort $\Gamma = \{b_1, \ldots, b_n\}$ wählen. Dann ist nach Lemma 2.5.3 das Semi–Thue

[1] Anstatt 3 könnte auch jeder größere Faktor gewählt werden.

System $\phi(\mathcal{P})$ ebenfalls längenreduzierend und konfluent, und es gilt

$$\phi(\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft) \leftrightarrow^*_{\phi(\mathcal{P})} \phi(q_f)$$

genau dann, wenn

$$\phi(\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft) \rightarrow^*_{\phi(\mathcal{P})} \phi(q_f)$$

(da $\phi(\mathcal{P})$ konfluent ist, und $\phi(q_f) \in \mathrm{IRR}(\phi(\mathcal{P}))$ gilt) genau dann, wenn

$$\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow^*_{\mathcal{P}} q_f$$

(nach Lemma 2.5.3) genau dann, wenn $\mathcal{M}$ auf der Eingabe $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^*$ nach höchstens m Schritten terminiert. Da schließlich $\phi(\mathcal{P})$ aus $\mathcal{P}$ (und damit aus $\mathcal{M}$ und $\#^m$) in AC^0 berechnet werden kann, beweist dies den Satz. $\Box$

Beweis von Satz 3.1.1. In [BO81] wurde gezeigt, daß sich $\mathrm{KOLR}(\Gamma^*)$ in P befindet. Es muß somit noch gezeigt werden, daß $\mathrm{KOLR}(\Gamma^*)$ P–hart für jedes endliche Γ mit $|\Gamma| > 1$ ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{KOLR}(\{a,b\}^*)$ P–hart ist. Seien $(\mathcal{M}, w, \#^m)$, Γ und $\mathcal{P}$ aus dem vorherigen Beweis von Satz 3.1.2 gewählt. Seien A und B zwei neue Symbole, die nicht in Γ enthalten sind, und sei $n = 3(m+1)+|w|+2$. Das Semi–Thue System $\mathcal{R}$ über $\Gamma \cup \{A, B\}$ sei schließlich

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \{A^n B \rightarrow \triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft,\ AB \rightarrow q_f\}.$$

Aufgrund der Wahl von n ist $\mathcal{R}$ längenreduzierend. Mit der Regel $A^n B \rightarrow \triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft$ wird eine Anfangskonfiguration für $\mathcal{M}$ erzeugt. Da der Anfangszustand q_0 in dieser Konfiguration $3(m+1)$–mal repräsentiert ist, können maximal $m+1$ Schritte von $\mathcal{M}$ mit den Regeln (2a) bis (2f) aus Abbildung 3.1 simuliert werden. Offensichtlich läßt sich $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{M}$, w und $\#^m$ in AC^0 berechnen.

Aus Behauptung 1 aus dem vorherigen Beweis von Satz 3.1.2 folgt, daß $\mathcal{M}$ auf der Eingabe $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^*$ nach höchstens m Schritten genau dann terminiert, wenn $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow^*_{\mathcal{P}} q_f$ gilt. Letzteres gilt offensichtlich genau dann, wenn $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow^*_{\mathcal{R}} q_f$ gilt.

Behauptung 2: $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \rightarrow^*_{\mathcal{R}} q_f$ gilt.

Sei zunächst $\mathcal{R}$ konfluent. Wegen

$$A^n B \rightarrow_{\mathcal{R}} A^{n-1} q_f \rightarrow^{n-1}_{(1b)} q_f \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R}) \quad \text{und} \quad A^n B \rightarrow_{\mathcal{R}} \triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft$$

muß dann $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \to_{\mathcal{R}}^* q_f$ gelten. Gilt andererseits $\triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft \to_{\mathcal{R}}^* q_f$, so ist das kritische Paar $(A^{n-1} q_f, \triangleright q_0^{3(m+1)} w_r \triangleleft)$ konfluent. An allen anderen kritischen Paaren muß wieder eine der Regeln (1a) oder (1b) beteiligt sein. Da q_f absorbierend ist, sind solche kritischen Paare konfluent. Also ist $\mathcal{R}$ konfluent.

Die P–Härte von KOLR$(\{a,b\}^*)$ folgt nun wie im Beweis von Satz 3.1.2 aus Lemma 2.5.3 durch Kodieren von $\Gamma \cup \{A, B\}$ in $\{a,b\}$. □

3.2 Längenreduzierende Vektorersetzungssysteme

In [VRL98] wurde gezeigt, daß das Konfluenzproblem für Vektorersetzungssysteme entscheidbar ist. Außerdem wurde durch eine Reduktion vom Wortproblem für kommutative Halbgruppen [MM82] gezeigt, daß dieses Problem EXPSPACE–hart ist. Für den längenreduzierenden Fall kann jedoch durch die Betrachtung kritischer Paare eine bessere obere Schranke erzielt werden. Wir weichen dabei von Definition 2.4.3 ab und definieren den Begriff des kritischen Paares für ein Vektorersetzungssystem wie folgt [BL81]:

Definition 3.2.1. Sei $\mathcal{R}$ ein Vektorersetzungssystem über Σ. Die Menge aller kritischen Paare von $\mathcal{R}$ besteht aus allen Paaren $(t_0, t_1) \in \Sigma^{\oplus} \times \Sigma^{\oplus}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existieren Regeln $(\ell_0, r_0), (\ell_1, r_1) \in \mathcal{R}$ mit $|t_i|_a = max(|\ell_0|_a, |\ell_1|_a) - |\ell_i|_a + |r_i|_a$ für alle $a \in \Sigma$.

Es ist dann einfach zu zeigen, daß $\mathcal{R}$ genau dann lokal konfluent ist, wenn alle kritischen Paare von $\mathcal{R}$ nach obiger Definition konfluent sind. Es ist zu beachten, daß die obige Definition für je zwei Regeln $(\ell_0, r_0), (\ell_1, r_1) \in \mathcal{R}$ genau ein kritisches Paar von $\mathcal{R}$ liefert, welches jedoch trivialerweise konfluent ist, falls $alph(\ell_0) \cap alph(\ell_1) = \emptyset$ gilt. Es existieren also höchstens $|\mathcal{R}| \cdot (|\mathcal{R}| - 1)$ viele kritische Paare von $\mathcal{R}$, die nicht trivialerweise konfluent sind. Ist $\mathcal{R}$ längenreduzierend, so genügt es zur Überprüfung der Konfluenz von $\mathcal{R}$ für alle kritischen Paare (s, t) von $\mathcal{R}$ Normalformen von s und t zu berechnen und zu überprüfen, ob diese Normalformen identisch sind. Da für kommutative Wörter u und v mit $|u| < |v|$ auch $bit(u) \in O(bit(v))$ gilt, ist dieses Verfahren ein PSPACE–Algorithmus. Da jedoch die Berechnung einer Normalform von s eine in $bit(s)$ exponentielle Anzahl von Ersetzungsschritten benötigen kann, ist dies kein NP–Algorithmus. Die Existenz eines solchen Algorithmuses ist in der Tat recht unwahrscheinlich, da Konfluenz für Vektorersetzungssysteme PSPACE–vollständig ist:

Satz 3.2.2. KOLRV ist PSPACE–vollständig.

Beweis. Das folgende Problem ist bekanntlich PSPACE–vollständig [Kar72]:
EINGABE: Ein *deterministischer linear beschränkter Automat* $\mathcal{M}$ und eine Eingabe w für $\mathcal{M}$.
FRAGE: Akzeptiert $\mathcal{M}$ die Eingabe w?

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \triangleright, \triangleleft, \delta, q_0, q_f)$ ein deterministischer linear beschränkter Automat, wobei Q die endliche Zustandsmenge ist, Σ das Bandalphabet ist, $\triangleright \in \Sigma$ das linke Ende der Eingabe markiert, $\triangleleft \in \Sigma$ das rechte Ende der Eingabe markiert, $\delta : (Q \backslash \{q_f\}) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R\}$ die Übergangsfunktion ist, $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist, und q_f der eindeutige Endzustand ist. Die Übergangsfunktion muß so definiert sein, daß

- sich der Schreib/Lesekopf nie links (rechts) von $\triangleright$ ($\triangleleft$) befindet und
- nie $\triangleright$ ($\triangleleft$) durch ein Symbol verschieden von $\triangleright$ ($\triangleleft$) überschreibt, und
- ein Symbol $a \in \Sigma \backslash \{\triangleright, \triangleleft\}$ nicht durch $\triangleright$ oder $\triangleleft$ überschrieben wird.

Sei $w \in (\Sigma \backslash \{\triangleright, \triangleleft\})^*$ eine Eingabe für $\mathcal{M}$. Es ist zu beachten, daß $\mathcal{M}$ genau dann die Eingabe w akzeptiert, wenn $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w terminiert, was wiederum genau dann geschieht, wenn $\mathcal{M}$, gestartet auf der zur Eingabe w gehörenden Anfangskonfiguration, nach endlich vielen Schritten den Endzustand q_f erreicht. Wir identifizieren jede Bandzelle mit einer Zahl aus $\{0, \ldots, |w|+1\}$, wobei Zelle 0 stets $\triangleright$ und Zelle $|w|+1$ stets $\triangleleft$ enthält. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, daß sich $\mathcal{M}$ stets in Zelle 0 befindet, wenn der Endzustand q_f erreicht wird. Wir konstruieren nun ein Vektorersetzungssystem $\mathcal{R}$ welches genau dann konfluent ist, wenn $\mathcal{M}$ die Eingabe w akzeptiert, was den Satz beweist. Unsere Konstruktion beruht auf der Simulation eines linear beschränkten Automaten durch ein Petri–Netz aus [JLL77]. Sei Γ das Alphabet

$$\Gamma = (\{0, \ldots, |w|+1\} \times Q) \cup (\{0, \ldots, |w|+1\} \times \Sigma) \cup \{A, \$\}.$$

Es ist zu beachten, daß Paare $(i, q) \in \{0, \ldots, |w|+1\} \times Q$ und Paare $(i, a) \in \{0, \ldots, |w|+1\} \times \Sigma$ einzelne Symbole sind. Das Symbol (i, q) soll anzeigen, daß sich $\mathcal{M}$ im Zustand q befindet, und der Schreib/Lesekopf sich

(1a)	$\$(i,q)(i,a) \to (i+1,p)(i,b)$	falls $\delta(q,a) = (p,b,R)$, $0 \leq i \leq \|w\|$
(1b)	$\$(i,q)(i,a) \to (i-1,p)(i,b)$	falls $\delta(q,a) = (p,b,L)$, $1 \leq i \leq \|w\|+1$
(2)	$(0,q_f)x \to (0,q_f)$	für alle $x \in \Gamma$
(3a)	$(i,a)(i,b) \to (0,q_f)$	für alle $a,b \in \Sigma$, $0 \leq i \leq \|w\|+1$
(3b)	$(i,p)(j,q) \to (0,q_f)$	für alle $p,q \in Q$, $0 \leq i,j \leq \|w\|+1$
(4a)	$A^n \to \$^m(0,q_0)(0,\triangleright)(1,a_1)\cdots(\|w\|,a_{\|w\|})(\|w\|+1,\triangleleft)$	
(4b)	$A^2 \to (0,q_f)$	

Abbildung 3.2: Das Vektorersetzungssystem $\mathcal{R}$ aus dem Beweis von Satz 3.2.2. Es ist zu beachten, daß $q \neq q_f$ in (1a) und (1b) gilt.

in der i–ten Bandzelle befindet. Das Symbol (i,a) soll anzeigen, daß die i–te Bandzelle das Symbol a enthält. Da Zelle 0 stets $\triangleright$ enthält, und Zelle $|w|+1$ stets $\triangleleft$ enthält, werden die Symbole $(0,\triangleright)$ und $(|w|+1,\triangleleft)$ stets vorhanden sein. Da außerdem der Automat $\mathcal{M}$ genau dann terminiert, wenn der Endzustand q_f erreicht wird, und der Schreib/Lesekopf sich in Zelle 0 befindet, zeigt das Symbol $(0,q_f)$ an, daß der Automat $\mathcal{M}$ terminiert hat. Das Vektorersetzungssystem $\mathcal{R}$ über Γ bestehe aus den Regeln in Abbildung 3.2, wobei $w = a_1a_2\cdots a_{|w|}$, $m = |Q|\cdot|\Sigma|^{|w|}\cdot(|w|+2)$ und $n = m+|w|+4$ gelte[2]. Die Regeln (1a) und (1b) simulieren $\mathcal{M}$, wobei das zusätzliche \$ in den linken Seiten notwendig ist, um diese Regeln längenreduzierend zu machen. Regel (2) macht das Symbol $(0,q_f)$ absorbierend. Die Regeln (3a) und (3b) machen kritische Paare konfluent, welche von den Regeln (1a) und (1b) erzeugt werden. Insbesondere ist es leicht zu sehen, daß das Vektorersetzungssystem, welches aus den Regeln (1a), (1b), (2), (3a) und (3b) besteht, konfluent ist. Mit den Regeln (4a) und (4b) wird schließlich ein kritisches Paar erzeugt. Die Regel (4b) erzeugt das absorbierende Symbol $(0,q_f)$, während die Regel (4a) die Kodierung der Anfangskonfiguration von $\mathcal{M}$ erzeugt. Da jeder Simulationsschritt von $\mathcal{R}$ mittels der Regeln (1a) und (1b) ein \$ konsumiert, müssen genügend \$ in der Anfangskonfiguration verfügbar gemacht werden. Da es maximal $m = |Q|\cdot|\Sigma|^{|w|}\cdot(|w|+2)$ viele verschiedene Konfigurationen gibt, terminiert der Automat $\mathcal{M}$ auf die Eingabe w entweder nach höchstens m Schritten, oder er gerät in eine Endlosschleife. Also genügen m viele \$ in der An-

[2] Wir verzichten auf die Fixierung einer beliebigen linearen Ordnung auf dem Alphabet Γ, welche für die Beschreibung von kommutativen Wörtern aus $\Gamma^{\oplus}$ eigentlich nötig wäre.

fangskonfiguration. Es ist zu beachten, daß in der binären Repräsentation von $\mathcal{R}$ die m vielen \$ nur Platz $O(ld(m)) = O(ld(|Q|) + |w| \cdot ld(|\Sigma|) + ld(|w|+2))$ benötigen, was polynomiell in $|w|$ und der Länge der Beschreibung von $\mathcal{M}$ ist. Das gleiche gilt auch für die Zahl $n = m + |w| + 4$ in der linken Seite der Regel (4a), welche so gewählt wurde, daß die Regel (4a) längenreduzierend ist. Offensichtlich gilt nun $A^n \to_{(4b)} A^{n-2}(0, q_f) \to_{(2)}^{n-2} (0, q_f) \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R})$ und

$$A^n \to_{(4a)} \$^m(0, q_0)(0, \triangleright)(1, a_1) \cdots (|w|, a_{|w|})(|w|+1, \triangleleft).$$

Akzeptiert der Automat $\mathcal{M}$ die Eingabe w nicht, d.h. terminiert $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w nicht, so erhalten wir durch Simulation von m Schritten

$$\begin{aligned}\$^m(0, q_0)(0, \triangleright)(1, a_1) \cdots (|w|, a_{|w|})(|w|+1, \triangleleft) \to_{\mathcal{R}}^{m} & \\ (i, q)(0, \triangleright)(1, b_1) \cdots (|w|, b_{|w|})(|w|+1, \triangleleft) &\in \mathrm{IRR}(\mathcal{R}),\end{aligned}$$

wobei $i \in \{0, \ldots, |w|+1\}$, $q \in Q \backslash \{q_f\}$ und $b_j \in \Sigma$ $(1 \leq j \leq |w|)$ gilt. Also ist $\mathcal{R}$ nicht konfluent. Akzeptiert andererseits $\mathcal{M}$ die Eingabe w, so erreicht $\mathcal{M}$ nach $k \leq m$ Schritten den Endzustand q_f und terminiert in Zelle 0. Es folgt

$$\begin{aligned}\$^m(0, q_0)(0, \triangleright)(1, a_1) \cdots (|w|, a_{|w|})(|w|+1, \triangleleft) \to_{\mathcal{R}}^{k} & \\ \$^{m-k}(0, q_f)(0, \triangleright)(1, b_1) \cdots (|w|, b_{|w|})(|w|+1, \triangleleft) &\to_{(2)}^{+} (0, q_f).\end{aligned}$$

Also ist das kritische Paar

$$(A^{n-2}(0, q_f),\ \$^m(0, q_0)(0, \triangleright)(1, a_1) \cdots (|w|, a_{|w|})(|w|+1, \triangleleft))$$

konfluent. Da auch alle anderen kritischen Paare konfluent sind, ist $\mathcal{R}$ konfluent. $\square$

Der folgende Satz ergibt sich aus dem obigen Beweis analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 3.1 über Semi–Thue Systeme. Es ist zu beachten, daß das Wortproblem für allgemeine Vektorersetzungssysteme EXPSPACE–vollständig ist [MM82].

Satz 3.2.3. Das uniforme Wortproblem für konfluente und längenreduzierende Vektorersetzungssysteme ist PSPACE–vollständig.

Theorem 3.2.2 motiviert die Frage, ob Konfluenz für längenreduzierende Vektorersetzungssysteme in einer genügend großen aber festen Dimension bereits PSPACE–vollständig ist. Die für Semi–Thue Systeme verwendete Technik, mehrere Symbole in zwei Symbole zu kodieren, funktioniert für Vektorersetzungssysteme nicht. Andererseits existiert eine Simulation eines linear beschränkten Automaten durch ein 4–dimensionales Vektorersetzungssystem [RY86] sowie eine Simulation eines 3-Zählerautomaten mit in der Eingabelänge exponentiell beschränkten Zählern[3] durch ein 6–dimensionales Vektorersetzungssystem [Huy85]. In beiden Simulationen treten jedoch unerwünschte kritische Paare auf, und es scheint nicht klar zu sein, ob diese kritischen Paare durch eine polynomiell beschränkte Zahl von zusätzlichen Regeln (wie etwa den Regeln (3a) und (3b) im obigen Beweis) aufgelöst werden können.

3.3 Längenreduzierende Spurersetzungssysteme

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) unentscheidbar ist, falls weder $I = \emptyset$ (d.h. $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \Sigma^*$) noch $I = (\Sigma \times \Sigma)\backslash Id_\Sigma$ (d.h. $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \Sigma^\oplus$) gilt. Für diesen Zweck ist es nützlich, die folgende Verschärfung von KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) zu untersuchen:
KOLR$_{\neq 1}$($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) ist das folgende Problem:
EINGABE: Ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit $1 \notin ran(\mathcal{R})$.
FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

Offensichtlich impliziert die Unentscheidbarkeit von KOLR$_{\neq 1}$($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) auch die Unentscheidbarkeit von KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$). Unser Beweis wird aus zwei Hauptschritten bestehen. In Abschnitt 3.3.1 werden wir die Unentscheidbarkeit von KOLR$_{\neq 1}$($\mathbb{M}(\{a, b, c\}, I)$) für $I = \{(a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$ und $I = \{(a, c), (c, a)\}$ beweisen. Die entsprechenden Spurmonoide sind die kleinsten Spurmonoide (gemessen in $|\Sigma|$), die weder frei noch frei kommutativ sind. In einem zweiten Schritt beweisen wir in Abschnitt 3.3.2, daß aus $\Gamma \subseteq \Sigma$ und der Unentscheidbarkeit von KOLR$_{\neq 1}$($\mathbb{M}(\Gamma, (\Gamma \times \Gamma) \cap I)$) auch die Unentscheidbarkeit von KOLR$_{\neq 1}$($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) folgt. Nur für diesen letzten Schritt ist die Bedingung $1 \notin ran(\mathcal{R})$ wichtig.

[3] Es ist bekannt, daß für solche Automaten das Akzeptanzproblem PSPACE–vollständig ist.

3.3.1 Unabhängigkeitsalphabete mit drei Symbolen

Ist $\Sigma = \{a, b\}$, so gilt für ein Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I) entweder $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \{a, b\}^*$ oder $\mathbb{M}(\Sigma, I) \simeq \{a, b\}^{\oplus}$. In beiden Fällen können wir Konfluenz für terminierende Spurersetzungssysteme entscheiden. Gilt $|\Sigma| = 3$, so existieren bis auf Isomorphie zwei Unabhängigkeitsalphabete, deren zugehöriges Spurmonoid weder frei noch frei kommutativ ist. Dies sind die beiden folgenden Unabhängigkeitsalphabete:

$$a \text{---} c \text{---} b \qquad\qquad a \text{---} c \quad b$$

Sie werden in den folgenden zwei Abschnitten behandelt.

Der Fall $a - c - b$

Sei $(\Sigma, I) = (\{a, b, c\}, \{(a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\})$. Dann ist das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ isomorph zu $\{a, b\}^* \times \{c\}^*$. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\{a, b\}^* \times \{c\}^*)$ unentscheidbar ist. Hierzu beweisen wir zunächst, daß $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\Gamma^* \times \{c\}^*)$ für ein bestimmtes Alphabet Γ, welches mehr als zwei Symbole enthält, unentscheidbar ist. In einem zweiten Schritt zeigen wir, wie sich das Alphabet Γ in das Alphabet $\{a, b\}$ kodieren läßt.

Zunächst studieren wir die Struktur der kritischen Situationen aus $\mathrm{CS}(\mathcal{R})$, falls $\mathcal{R}$ ein SES über einem direkten Produkt $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ von freien Monoiden ist. Im folgenden seien Σ_1 und Σ_2 zwei nicht–leere endliche Alphabete. Für eine Spur $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ schreiben wir $\boldsymbol{u}^{(1)} = u_1$ und $\boldsymbol{u}^{(2)} = u_2$ im folgenden. Das folgende Lemma ist offensichtlich.

Lemma 3.3.1. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$. Dann erfüllt $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) (aus Abschnitt 2.4), falls für alle Regeln $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ und alle $i \in \{1, 2\}$ aus $\boldsymbol{\ell}^{(i)} = 1$ auch $\boldsymbol{r}^{(i)} = 1$ folgt.

Wir sagen, daß ein Wort t *disjunkt von* $\ell_0 \neq 1$ *und* $\ell_1 \neq 1$ *erzeugt* wird, falls ein Wort s und ein $j \in \{0, 1\}$ mit $t = \ell_j s \ell_{1-j}$ existieren, siehe die folgende Graphik:

$\ell_j \neq 1$	s	$\ell_{1-j} \neq 1$

Das folgende Lemma ist intuitiv recht klar. Es besagt, daß für eine kritische Spur $(\boldsymbol{t}^{(1)}, \boldsymbol{t}^{(2)})$ bezüglich eines SES über $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ linke Seiten $\boldsymbol{\ell}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1$ existieren so, daß mindestens eine Komponente $\boldsymbol{t}^{(i)}$ $(i \in \{1, 2\})$ eine Überlappung von $\boldsymbol{\ell}_0^{(i)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$ darstellt. Ist dies etwa für $i = 1$ der Fall, so muß jedoch die zweite Komponente $\boldsymbol{t}^{(2)}$ nicht notwendigerweise eine Überlappung von $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$ sein. Gilt $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)} \neq 1 \neq \boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$, so genügt es, wenn $\boldsymbol{t}^{(2)}$ disjunkt von $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$ erzeugt wird. Ist andererseits etwa $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$ das leere Wort, so kann man sich auf den Fall $\boldsymbol{t}^{(2)} = \boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$ beschränken.

Lemma 3.3.2. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$. Dann gilt $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$ genau dann, wenn Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Wörter $u, v \in \Sigma_i^*$ mit den folgenden Eigenschaften existieren: Für $i = 1$ und $i = 2$ gilt jeweils einer der vier folgenden Fälle (1) bis (4). Außerdem gilt für $i = 1$ oder $i = 2$ Fall (2) oder Fall (3):

(1)	$\boldsymbol{\ell}_0^{(i)} \neq 1 \neq \boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$,	$\boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(i)} u \boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$,	$\boldsymbol{t}_0^{(i)} = \boldsymbol{r}_0^{(i)} u \boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$,	$\boldsymbol{t}_1^{(i)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(i)} u \boldsymbol{r}_1^{(i)}$
(2)	$\boldsymbol{\ell}_1^{(i)} \neq 1$,	$\boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(i)} = u \boldsymbol{\ell}_1^{(i)} v$,	$\boldsymbol{t}_0^{(i)} = \boldsymbol{r}_0^{(i)}$,	$\boldsymbol{t}_1^{(i)} = u \boldsymbol{r}_1^{(i)} v$
(3)	$\lvert\boldsymbol{\ell}_0^{(i)}\rvert > \lvert v \rvert$,	$\boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(i)} u = v \boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$,	$\boldsymbol{t}_0^{(i)} = \boldsymbol{r}_0^{(i)} u$,	$\boldsymbol{t}_1^{(i)} = v \boldsymbol{r}_1^{(i)}$
(4)	$\boldsymbol{\ell}_0^{(i)} = 1$,[4]	$\boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$,		$\boldsymbol{t}_1^{(i)} = \boldsymbol{r}_1^{(i)}$

Es ist zu beachten, daß in Fall (1) $\boldsymbol{t}^{(i)}$ disjunkt von $\boldsymbol{\ell}_0^{(i)} \neq 1$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(i)} \neq 1$ erzeugt wird, während in Fall (2) und (3) $\boldsymbol{t}^{(i)}$ eine Überlappung von $\boldsymbol{\ell}_0^{(i)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(i)}$ ist.

Beweis. Die wenn–Richtung des Lemmas ist einfach zu sehen. Für die andere Richtung sei $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$. Nach Definition 2.4.3 existieren Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Paare $\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{q}_j, \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{s} \in \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ $(j \in \{0,1\})$ mit

- $\boldsymbol{s} \neq 1, \quad \boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{s} \, I \, \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{p}_j \, I \, \boldsymbol{w}_j$ oder $\boldsymbol{q}_{1-j} \, I \, \boldsymbol{w}_j$ impliziert $\boldsymbol{w}_j = 1$ für $j \in \{0,1\}$,[5]
- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0 \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{q}_0,$
  $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{q}_0.$

[4] Da wir dieses Lemma nur auf Spurersetzungssysteme anwenden werden, welche die Bedingung aus Lemma 3.3.1 erfüllen, folgt aus $\boldsymbol{\ell}_0^{(i)} = 1$ auch $\boldsymbol{r}_0^{(i)} = 1$ und somit $\boldsymbol{t}_0^{(i)} = \boldsymbol{t}^{(i)}$.

[5] Diese Abschwächung der dritten Bedingung aus Definition 2.4.3 wird im folgenden genügen.

Wegen $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}^{(1)}, \boldsymbol{s}^{(2)}) \neq (1,1)$ muß $\boldsymbol{s}^{(1)} \neq 1$ oder $\boldsymbol{s}^{(2)} \neq 1$ gelten. Gelte etwa $\boldsymbol{s}^{(1)} \neq 1$. Es folgt $\boldsymbol{\ell}_0^{(1)} \neq 1 \neq \boldsymbol{\ell}_1^{(1)}$. Aus $\boldsymbol{s}\, I\, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1$ folgt weiter $\boldsymbol{w}_0^{(1)} = \boldsymbol{w}_1^{(1)} = 1$ und somit $\boldsymbol{t}^{(1)} = \boldsymbol{p}_1^{(1)}\boldsymbol{\ell}_0^{(1)}\boldsymbol{q}_1^{(1)} = \boldsymbol{p}_0^{(1)}\boldsymbol{\ell}_1^{(1)}\boldsymbol{q}_0^{(1)}$. Aus $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$ folgt außerdem $\boldsymbol{p}_j^{(1)} = 1$ für ein $j \in \{0,1\}$. Analog muß $\boldsymbol{q}_j^{(1)} = 1$ für ein $j \in \{0,1\}$ gelten. Für jede mögliche Kombination ist es einfach zu sehen, daß $\boldsymbol{t}^{(1)}$ eine Überlappung von $\boldsymbol{\ell}_0^{(1)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(1)}$ ist, d.h. für $i = 1$ gilt Fall (2) oder Fall (3) aus dem Lemma. Gilt auch $\boldsymbol{s}^{(2)} \neq 1$, so muß auch $\boldsymbol{t}^{(2)}$ eine Überlappung von $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$ sein. Gelte nun $\boldsymbol{s}^{(2)} = 1$. Da $\boldsymbol{w}_0^{(2)} \neq 1 \neq \boldsymbol{w}_1^{(2)}$ einen Widerspruch zu $\boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{w}_1$ darstellt, können wir o.B.d.A. $\boldsymbol{w}_1^{(2)} = 1$ annehmen.
Fall 1: $\boldsymbol{w}_0^{(2)} \neq 1$: Es folgt, daß weder $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{w}_0$ noch $\boldsymbol{q}_1\, I\, \boldsymbol{w}_0$ gilt (aus $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{w}_0$ würde $\boldsymbol{w}_0 = 1$ folgen). Wegen $\boldsymbol{w}_0^{(1)} = 1$, muß somit $\boldsymbol{p}_0^{(2)} \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_1^{(2)}$ gelten. Aus $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$ folgt schließlich $\boldsymbol{p}_1^{(2)} = 1 = \boldsymbol{q}_0^{(2)}$. Somit gilt

$$\boldsymbol{\ell}_0^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{s}^{(2)}\boldsymbol{q}_0^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)} \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_1^{(2)} = \boldsymbol{p}_1^{(2)}\boldsymbol{s}^{(2)}\boldsymbol{q}_1^{(2)} = \boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$$

und

$$\boldsymbol{t}^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{w}_0^{(2)}\boldsymbol{p}_1^{(2)}\boldsymbol{s}^{(2)}\boldsymbol{q}_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)}\boldsymbol{q}_0^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{w}_0^{(2)}\boldsymbol{q}_1^{(2)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(2)}\boldsymbol{w}_0^{(2)}\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}.$$

Also wird $\boldsymbol{t}^{(2)}$ von $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$ und $\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$ disjunkt erzeugt, d.h. für $i = 2$ gilt (1) aus dem Lemma.
Fall 2: $\boldsymbol{w}_0^{(2)} = 1$, d.h. $\boldsymbol{w}_0 = (1,1)$: Wegen $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$ können wir o.B.d.A. $\boldsymbol{p}_1^{(2)} = 1$ annehmen. Es folgt $\boldsymbol{t}^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{q}_1^{(2)}\boldsymbol{q}_0^{(2)}$. Gilt auch $\boldsymbol{q}_1^{(2)} = 1$, so folgt $\boldsymbol{\ell}_1^{(2)} = 1$ und $\boldsymbol{t}^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{q}_0^{(2)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(2)}$. Wir erhalten somit Fall (4) aus dem Lemma. Gilt andererseits $\boldsymbol{q}_1^{(2)} \neq 1$, so folgt $\boldsymbol{q}_0^{(2)} = 1$ aus $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$. Also gilt $\boldsymbol{t}^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)}\boldsymbol{q}_1^{(2)} = \boldsymbol{\ell}_0^{(2)}\boldsymbol{\ell}_1^{(2)}$. Es ergibt sich dann entweder Fall (1) aus dem Lemma (falls $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)} \neq 1$ gilt) oder Fall (4) aus dem Lemma (falls $\boldsymbol{\ell}_0^{(2)} = \boldsymbol{p}_0^{(2)} = 1$ gilt). $\square$

Wir beginnen nun mit dem Beweis der Unentscheidbarkeit des Problems $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\{a,b\}^* \times \{c\}^*)$. Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \square, \delta, q_0, q_f)$ im weiteren eine universelle deterministische Turing–Machine. Da $\mathcal{M}$ universell ist, ist es unentscheidbar, ob $\mathcal{M}$ für ein gegebenenes Eingabewort $w \in (\Sigma\backslash\{\square\})^+$ terminiert. Da $\mathcal{M}$ genau dann terminiert, wenn $\mathcal{M}$ den Endzustand q_f erreicht, ist es unentscheidbar, ob $\mathcal{M}$ für ein gegebenes Eingabewort $w \in (\Sigma\backslash\{\square\})^+$ nach endlich vielen Schritten den Endzustand q_f erreicht. Für die weiteren

(1a) $x0 \to 0$ für $x \in \Gamma$	(2a) $\lhd y \to 0$ für $y \in \Gamma \backslash \{\$\}$
(1b) $0x \to 0$ für $x \in \Gamma$	(2b) $\lhd \$ y \to 0$ für $y \in \Gamma \backslash \{\$\}$
(1c) $(0, c) \to 0$	(2c) $x \rhd \to 0$ für $x \in \Gamma$
(3a) $(\rhd A^{\lvert w \rvert + 2}, c) \to \rhd q_0 w \lhd$	(4a) $a\beta\$\$ \to a\$\beta$ für $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma \cup \{\lhd\}$
(3b) $(B, c) \to 0$	(4b) $a\$\beta\$\$ \to a\$\$\beta$ für $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma \cup \{\lhd\}$
(5a) $q \lhd \$\$ \to a'p\lhd$ falls $\delta(q, \Box) = (p, a', R)$	
(5b) $bq \lhd \$\$ \to pba'\lhd$ falls $\delta(q, \Box) = (p, a', L)$, $b \in \Sigma$	
(5c) $qa\$\$ \to a'p$ falls $\delta(q, a) = (p, a', R)$	
(5d) $bqa\$\$ \to pba'$ falls $\delta(q, a) = (p, a', L)$, $b \in \Sigma$	
(5e) $\rhd qa\$\$ \to \rhd p\Box a'$ falls $\delta(q, a) = (p, a', L)$	

Abbildung 3.3: Das SES $\mathcal{R}$ aus dem Beweis von Lemma 3.3.3. Es ist zu beachten, daß $q \neq q_f$ in (5a) bis (5e) gilt.

Betrachtungen fixieren wir eine Eingabe $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^+$ für $\mathcal{M}$. Als erstes werden wir ein SES $\mathcal{R}$ über einem Spurmonoid der Form $\Gamma^* \times \{c\}^*$ konstruieren, welches genau dann konfluent ist, wenn $\mathcal{M}$ nicht auf der Eingabe w terminiert.

Das folgende SES $\mathcal{R}$ ist eine Variante des in [NO88] angegebenen SES. Sei $\Gamma = Q \cup \Sigma \cup \{0, \rhd, \lhd, A, B, \$\}$, wobei $0, \rhd, \lhd, A, B, \$ \notin Q \cup \Sigma$ neue Symbole seien. Weiter sei $c \notin \Gamma$ ein weiteres Symbol. Im weiteren arbeiten wir in dem Spurmonoid $\Gamma^* \times \{c\}^*$. Ein Paar der Form $(s, 1)$ mit $s \in \Gamma^*$ bezeichnen wir auch kurz mit s. Wir definieren das SES $\mathcal{R}$ über $\Gamma \times \{c\}^*$ durch die Regeln in Abbildung 3.3. Es ist zu beachten, daß $\mathcal{R}$ längenreduzierend ist, und $1 \notin \mathit{ran}(\mathcal{R})$ gilt. Die Wirkung der einzelnen Regeln ähnelt den Regeln aus dem Beweis von Satz 3.1.1. Die Regeln (1a), (1b) und (1c) machen das Symbol 0 absorbierend, während die Regeln (5a) bis (5e) die Turing–Maschine $\mathcal{M}$ simulieren. Da wir das leere Wort $w = 1$ ausschließen, muß in diesen Regeln nicht das Paar $(1, \rhd q \lhd \$\$)$ betrachtet werden. Die entsprechende Regel hätte die Form $\rhd q \lhd \$\$ \to \rhd p \Box a' \lhd$ falls $\delta(q, \Box) = (p, a', L)$, und diese Regel ist nicht längenreduzierend. Die zusätzlichen zwei \$–Symbole in den Regeln (5a) bis (5e) machen diese Regeln einerseits längenreduzierend und schließen außerdem Überlappungen zwischen den linken Seiten dieser Regeln aus (wobei für letzteres auch noch wichtig ist, daß $\mathcal{M}$ deterministisch ist). Um die Simulationsregeln (5a) bis (5e) jedoch anwenden zu können, sind die Transportregeln (4a) und (4b) notwendig. Sie transportieren in Konfigurationen \$–Symbole soweit nach links, bis eine Simulationsregel anwendbar wird. Um die Transportregeln längenreduzierend zu machen, wird beim Transport eines \$ um ein Feld nach links gleichzeitig ein \$ konsumiert. Schließlich wird mit den Regeln (3a) und (3b) eine kritische Situation erzeugt, indem sich die linken Seiten dieser zwei Regeln das c in der zweiten Komponente teilen. Diese zwei Regeln erzeugen jedoch auch unerwünschte kritische Situationen, z.B. indem sich zwei linke Seiten der Regel (3a) das c in der zweiten Komponente teilen. Die so entstehenden kritischen Paare werden mittels der Regel (2c) konfluent gemacht. Mittels der Regeln (2a) und (2b) wird schließlich das absorbierende Symbol 0 erzeugt, falls die Transportregeln (4a) und (4b) genügend viele \$–Symbole verbraucht haben. Sei $\mathcal{R}_0$ das SES, welches aus den Regeln (1a), (1b) und (1c) besteht, und sei $\mathcal{R}_{4,5}$ das SES, welches aus den Regeln (4a), (4b) und (5a) bis (5e) besteht.

Lemma 3.3.3. $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\mathcal{M}$ nicht auf der Eingabe w terminiert.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, daß $\mathcal{M}$ für die Eingabe w terminiert. Es existieren dann $m > 0$, $u \in \Sigma^*$, $l \geq 0$, $a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$ und $k \geq 2$ so, daß

$$\begin{aligned}(\triangleright A^{|w|+2}\$^m B, c) \to_{(3a)} \triangleright q_0 w \triangleleft \$^m B \to^+_{\mathcal{R}_{4,5}} \\ \triangleright\, u q_f a_1 \$^2 a_2 \$^2 \cdots a_{l-1} \$^2 a_l \$^2 \triangleleft \$^k B = t \quad (3.1)\end{aligned}$$

gilt. Da $\mathcal{M}$ sich nicht aus dem Endzustand q_f bewegen kann, und $k \geq 2$ gilt, ist das Wort t irreduzibel bezüglich $\mathcal{R}$. Da aber auch $(\triangleright A^{|w|+2}\$^m B, c) \to_{(3b)} \triangleright A^{|w|+2}\$^m 0 \to^+_{(1a)} 0$ gilt, und auch das Wort 0 irreduzibel ist, ist $\mathcal{R}$ nicht konfluent.

Wir nehmen nun an, daß $\mathcal{M}$ nicht für die Eingabe w terminiert. Wir werden zeigen, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Da $\mathcal{R}$ terminierend ist und nach Lemma 3.3.1 die Bedingung (A) erfüllt, genügt es zu zeigen, daß alle Paare in $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ konfluent sind. Nach Lemma 3.3.2 müssen wir also nach Überlappungen in mindestens einer Komponente zwischen linken Seiten von $\mathcal{R}$ suchen. Die folgenden kritischen Situationen können auftreten:

(1) Für jede Regel $d \in \mathcal{R}$ welche die Form $(\ell, c) \to r$ hat (also für die Regeln (1c), (3a) und (3b)) und für alle $v \in \{c\}^*$ gilt $(\ell, cvc) \to_d (r, vc)$ und $(\ell, cvc) \to_d (r, cv)$. Das resultierende kritische Paar $((r, vc), (r, cv))$ ist wegen $cv = vc$ trivialerweise konfluent.

(2) Es ist zu beachten, daß aus $(s0t, u) \to_{\mathcal{R}} (v, u')$ folgt, daß Wörter $s', t' \in \Gamma^*$ mit $v = s'0t'$ existieren[6]. Da jedes Paar der Form $(s0t, u)$ mittels der Regeln (1a), (1b) und (1c) auf das absorbierende Symbol 0 reduziert werden kann, ergibt sich folgendes: Gilt $(s, t) \to_{d_1} (s_1, t_1)$ und $(s, t) \to_{d_2} (s_2, t_2)$, und ist d_1 oder d_2 eine der Regel (1a), (1b) oder (1c), so ist das Paar $((s_1, t_1), (s_2, t_2))$ konfluent. Die gleiche Überlegung gilt, falls d_1 und d_2 beide zu den Regeln (2a) bis (2c) gehören. Diese einfache Überlegung erledigt eine ganze Reihe von kritischen Paaren.

(3) Sei $d \in \mathcal{R}$ eine Regel der Form $(y\ell, c^i) \to r$, wobei $y \in \Gamma \backslash \{\$\}$ und $i \in \{0, 1\}$ gelte. Dann gilt $(\lhd y\ell, c^i) \to_d \lhd r$ und $(\lhd y\ell, c^i) \to_{(2a)} (0\ell, c^i)$, und wir erhalten das kritische Paar $((\lhd r, 1), (0\ell, c^i))$. Dieses Paar ist konfluent, denn es gilt einerseits $(0\ell, c^i) \to^+_{\mathcal{R}_0} 0$. Andererseits ergibt eine Betrachtung aller Regeln, daß r von der Form zs für ein $z \in \Gamma \backslash \{\$\}$ ist. Es folgt $\lhd r = \lhd zs \to_{(2a)} 0s \to^+_{(1b)} 0$. Die gleiche Betrachtung kann auch für die Regel (2b) anstelle der Regel (2a) gemacht werden.

(4) Sei d eine beliebige Regel aus $\mathcal{R}$, die von der Form $(\ell x, c^i) \to r$ ist, wobei $x \in \Gamma$ und $i \in \{0, 1\}$ gilt. Dann gilt $(\ell x \rhd, c^i) \to_d r \rhd$ und $(\ell x \rhd, c^i) \to_{(2c)} (\ell 0, c^i)$, und wir erhalten das kritische Paar $((r \rhd, 1), (\ell 0, c^i))$. Da r wieder von der Form sz für ein $z \in \Gamma$ ist, ist dieses Paar konfluent.

(5) $(x \rhd A^{|w|+2}, c) \to_{(3a)} x \rhd q_0 w \lhd$ und $(x \rhd A^{|w|+2}, c) \to_{(2c)} (0A^{|w|+2}, c)$ für $x \in \Gamma$: Wir erhalten das kritische Paar $((x \rhd q_0 w \lhd, 1), (0A^{|w|+2}, c))$, welches wegen $(0A^{|w|+2}, c) \to^+_{\mathcal{R}_0} 0$ und $x \rhd q_0 w \lhd \to_{(2c)} 0 q_0 w \lhd \to^+_{(1b)} 0$ konfluent ist.

(6) $x \rhd qa\$\$ \to_{(5e)} x \rhd p\Box a'$ und $x \rhd qa\$\$ \to_{(2c)} 0qa\$\$$, wobei $x \in \Gamma$ beliebig ist: Wir erhalten so das kritische Paar $(x \rhd p\Box a', 0qa\$\$)$, welches wegen $x \rhd p\Box a' \to_{(2c)} 0p\Box a' \to^3_{(1b)} 0$ konfluent ist.

Die restlichen vier Typen von kritischen Paaren werden von den beiden Hauptregeln (3a) und (3b) erzeugt, indem sich beide linke Seiten in der zweiten Komponente das c teilen.

(7) $(\rhd A^{|w|+2} v \rhd A^{|w|+2}, c) \to_{(3a)} \rhd A^{|w|+2} v \rhd q_0 w \lhd$ und
$(\rhd A^{|w|+2} v \rhd A^{|w|+2}, c) \to_{(3a)} \rhd q_0 w \lhd v \rhd A^{|w|+2}$, wobei $v \in \Gamma^*$ beliebig ist:

[6] Das Symbol 0 wird nicht gelöscht durch $\mathcal{R}$. Hierfür ist es wichtig, daß $q \neq q_f$ in den Regeln (5a) bis (5e) gilt.

Da die Wörter $\triangleright A^{|w|+2}v \triangleright q_0 w\triangleleft$ und $\triangleright q_0 w \triangleleft v \triangleright A^{|w|+2}$ beide einen Faktor der Form $x\triangleright$ $(x \in \Gamma)$ enthalten, kann auf beide Wörter die Regel (2c) angewendet werden. Danach können die resultierenden Wörter beide mittels der Regeln (1a) und (1b) auf 0 reduziert werden.

(8) $(Bv \triangleright A^{|w|+2}, c) \rightarrow_{(3a)} Bv \triangleright q_0 w\triangleleft$ und
$(Bv\triangleright A^{|w|+2}, c) \rightarrow_{(3b)} 0v\triangleright A^{|w|+2}$, wobei $v \in \Gamma^*$ beliebig ist: In dem Wort $Bv \triangleright q_0 w\triangleleft$ existiert wieder ein Faktor der Form $x\triangleright$, weshalb es auf das Symbol 0 reduziert werden kann. Dies gilt natürlich auch für das Wort $0v \triangleright A^{|w|+2}$.

(9) $(\triangleright A^{|w|+2}vB, c) \rightarrow_{(3a)} \triangleright q_0 w \triangleleft vB$ und
$(\triangleright A^{|w|+2}vB, c) \rightarrow_{(3b)} \triangleright A^{|w|+2}v0$, wobei $v \in \Gamma^*$ beliebig ist: Dies ist der Hauptfall, dessen Betrachtung wir zunächst verschieben.

(10) $(BvB, c) \rightarrow_{(3b)} 0vB$ und $(BvB, c) \rightarrow_{(3b)} Bv0$, wobei $v \in \Gamma^*$ beliebig ist: trivial

Andere nicht trivialerweise konfluente kritische Paare existieren nicht. Insbesondere führen die Regeln (5a) bis (5e) zu keinen weiteren kritischen Paaren, da $\mathcal{M}$ deterministisch ist. Es muß somit nur noch für alle $v \in \Gamma^*$ das kritische Paar $(\triangleright q_0 w \triangleleft vB, \triangleright A^{|w|+2}v0)$ betrachtet werden. Da $\triangleright A^{|w|+2}v0 \rightarrow^+_{(1a)} 0$ gilt, genügt es, die folgende Behauptung zu zeigen.
Behauptung: Falls $\mathcal{M}$ für die Eingabe w nicht terminiert, gilt $\triangleright q_0 w \triangleleft vB \rightarrow^+_{\mathcal{R}} 0$ für alle $v \in \Gamma^*$.
Fall 1: $v = \$^m$ für ein $m \geq 0$: Indem wir $\mathcal{M}$ genügend lange simulieren und so genügend viele \$–Symbole verbrauchen, erhalten wir

$$\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m B \rightarrow^*_{\mathcal{R}_{4,5}} \triangleright u q a_1 \$^{i_1} a_2 \$^{i_2} \cdots a_{l-1} \$^{i_{l-1}} a_l \$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}} B,$$

wobei $u \in \Sigma^*$, $q \in Q$, $l \geq 0$, $a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$ und $i_1, \ldots, i_{l+1} \in \{0, 1\}$ gilt. Also gilt

$$\begin{aligned} &\triangleright u q a_1 \$^{i_1} a_2 \$^{i_2} \cdots a_{l-1} \$^{i_{l-1}} a_l \$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}} B \rightarrow_{\{(2a),(2b)\}} \\ &\triangleright u q a_1 \$^{i_1} a_2 \$^{i_2} \cdots a_{l-1} \$^{i_{l-1}} a_l \$^{i_l} 0 \rightarrow^+_{(1a)} 0. \end{aligned}$$

Fall 2: $v = \$^m y v'$, wobei $m \geq 0, y \in \Gamma \backslash \{\$\}$ und $v' \in \Gamma^*$ gilt. Wieder erhalten wir

$$\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m y v' B \rightarrow^*_{\mathcal{R}_{4,5}} \triangleright u q a_1 \$^{i_1} a_2 \$^{i_2} \cdots a_{l-1} \$^{i_{l-1}} a_l \$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}} y v' B,$$

wobei $u \in \Sigma^*$, $q \in Q$, $l \geq 0$, $a_1, \dots, a_l \in \Sigma$ und $i_1, \dots, i_{l+1} \in \{0,1\}$ gilt. Da $y \in \Gamma \backslash \{\$\}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} &\triangleright uqa_1\$^{i_1}a_2\$^{i_2}\cdots a_{l-1}\$^{i_{l-1}}a_l\$^{i_l}\triangleleft\$^{i_{l+1}}yv'B \to_{\{(2a),(2b)\}} \\ &\triangleright uqa_1\$^{i_1}a_2\$^{i_2}\cdots a_{l-1}\$^{i_{l-1}}a_l\$^{i_l}0v'B \to^+_{\{(1a),(1b)\}} 0. \end{aligned}$$

Der Beweis des Lemmas ist damit vollständig. □

Aus dem vorherigen Lemma folgt sofort, daß $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\Gamma^* \times \{c\}^*)$ unentscheidbar ist. Dieses Resultat wird durch das folgende Lemma noch verschärft. Dieses Lemma löst auch die Frage aus [Die90b], S. 117, ob Konfluenz für längenreduzierende Spurersetzungssysteme bereits für Unabhängigkeitsalphabete mit drei Symbolen unentscheidbar ist.

Lemma 3.3.4. $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\{a,b\}^* \times \{c\}^*)$ ist unentscheidbar.

Beweis. Seien $\mathcal{R}$ und Γ aus dem vorherigen Beweis gewählt. Wir werden wieder die Kodierungsfunktion aus Lemma 2.5.2 benutzen. Sei $\Gamma = \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann definieren wir $\phi(b_i) = aba^{i+1}b^{n-i+2}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\sigma(s,t) = (\phi(s), t)$ für $(s,t) \in \Gamma^* \times \{c\}^*$. Wir können nun jedoch nicht Lemma 2.5.1 anwenden, da die vierte Bedingung aus diesem Lemma nicht erfüllt ist für das SES $\sigma(\mathcal{R})$. Es gilt z.B. $(\phi(B)s\phi(B), c) \in \mathrm{CT}(\sigma(\mathcal{R}))$ für alle $s \in \{a,b\}^*$. Liegt jedoch s nicht im Bildbereich von ϕ, so liegt auch $(\phi(B)s\phi(B), c)$ nicht im Bildbereich von σ. Wir lösen dieses Problem durch Einführung von zusätzlichen Regeln. Sei $\mathcal{P}$ das SES $\sigma(\mathcal{R})$, erweitert um die folgenden Regeln, wobei $x \in \{a,b\}$ und $s \in \{a,b\}^{n+5} \backslash \{\phi(x) \mid x \in \Gamma\}$ beliebig sind[7]:

(6a) $x\phi(0) \to \phi(0)$	(6c) $\phi(\triangleleft)s \to \phi(0)$	(6e) $x\phi(\triangleright) \to \phi(0)$
(6b) $\phi(0)x \to \phi(0)$	(6d) $\phi(\triangleleft\$)s \to \phi(0)$	

Ist $d \in \mathcal{R}$ etwa die Regel $(\ell, c^i) \to r$ $(i \in \{0,1\})$, so bezeichnen wir die entsprechende Regel $(\phi(\ell), c^i) \to \phi(r)$ mit $\sigma(d)$. Z.B. ist $\sigma(3a)$ die Regel $(\phi(\triangleright A^{|w|+2}), c) \to \phi(\triangleright q_0 w \triangleleft)$. Die Regeln (6a), (6b) und (6e) entsprechen den Regeln $\sigma(1a)$, $\sigma(1b)$ und $\sigma(2c)$ aus $\sigma(\mathcal{R})$. Diese letzteren drei Regeln sind in der Tat überflüssig in $\mathcal{P}$. Das SES $\mathcal{P}$ ist offensichtlich längenreduzierend, und es gilt $1 \notin ran(\mathcal{P})$. Außerdem erfüllt $\mathcal{P}$ die Bedingung (A). Das Lemma folgt nun unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

Behauptung: $\mathcal{P}$ ist genau dann konfluent, wenn die Turing–Maschine $\mathcal{M}$ für die Eingabe w nicht terminiert.

[7] Es ist zu beachten, daß jedes Wort $\phi(x)$ für $x \in \Gamma$ die feste Länge $n+5$ hat.

Zuerst nehmen wir an, daß die Maschine $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w terminiert. Nach (3.1) aus dem Beweis von Lemma 3.3.3 existiert dann ein $m > 0$ mit

$$(\rhd A^{|w|+2}\$^m B, c) \to_{\mathcal{R}}^{+} \rhd u q_f a_1 \$^2 a_2 \$^2 \cdots a_{l-1}\$^2 a_l \$^2 \lhd \$^k B = t,$$

wobei $u \in \Sigma^*, l \geq 0, a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$, $k \geq 2$ und $t \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R})$ gilt. Eine Anwendung von σ liefert

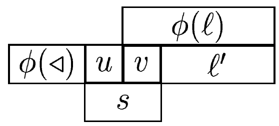
$$(\phi(\rhd A^{|w|+2}\$^m B), c) \to_{\mathcal{P}}^{+} \phi(\rhd u q_f a_1 \$^2 a_2 \$^2 \cdots a_{l-1}\$^2 a_l \$^2 \lhd \$^k B) = \phi(t).$$

Wir behaupten, daß das Wort $\phi(t)$ irreduzibel bezüglich $\mathcal{P}$ ist. Irreduzibilität bezüglich den Regeln aus $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$ folgt aus der Irreduzibilität von t bezüglich $\mathcal{R}$ und Aussage (2) in Lemma 2.5.2. Das Wort $\phi(t)$ ist aber auch bezüglich den zusätzlichen Regeln (6a) bis (6e) irreduzibel, da $\phi(t)$ keines der Wörter $\phi(0)$, $x\phi(\rhd)$ und $\phi(\lhd\$^i)s$ für $x \in \{a, b\}$, $i \in \{0, 1\}$ und $s \in \{a, b\}^{n+5} \backslash \{\phi(x) \mid x \in \Gamma\}$ als Faktor enthält, was wieder aus Aussage (2) in Lemma 2.5.2 folgt. Nun gilt aber auch $(\rhd A^{|w|+2}\$^m B, c) \to_{\mathcal{R}}^{+} 0$, d.h. $(\phi(\rhd A^{|w|+2}\$^m B), c) \to_{\mathcal{P}}^{+} \phi(0)$. Da auch $\phi(0) \in \mathrm{IRR}(\mathcal{P})$ gilt, folgt, daß $\mathcal{P}$ nicht konfluent ist.

Wir nehmen nun an, daß die Maschine $\mathcal{M}$ für die Eingabe w nicht terminiert. Nach Lemma 3.3.3 ist dann $\mathcal{R}$ konfluent. Wir betrachten nun eine beliebige kritische Situation $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{P})$ mit $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1 \in \{a, b\}^* \times \{c\}^*$. Seien d_0 und d_1 die Regeln aus $\mathcal{P}$, die diese kritische Situation erzeugen. Der Fall, daß d_0 und d_1 beide zu den Regeln $\sigma(1a)$, $\sigma(1b)$, $\sigma(1c)$, $\sigma(2a)$, $\sigma(2b)$, $\sigma(2c)$, (6a), ..., (6e) gehören ist klar, da dann $\boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t}_1$ beide $\phi(0)$ als Faktor enthalten und somit mittels der Regeln (6a) und (6b) auf $\phi(0)$ reduziert werden können. Als nächstes betrachten wir den Fall, daß etwa die Regel d_0 eine der Regeln (6a) bis (6e) ist, während d_1 eine der Regeln $\sigma(3a)$, $\sigma(3b)$, $\sigma(4a)$, $\sigma(4b)$, $\sigma(5a), \ldots, \sigma(5e)$ ist. Wir betrachten hier nur den Fall, daß d_0 die Regel (6c) ist, die anderen Fälle können ähnlich behandelt werden. Sei d_1 von der Gestalt $(\phi(\ell), c^i) \to \phi(r)$, wobei $\ell, r \in \Gamma^+$ und $i \in \{0, 1\}$ gilt. Wir müssen nun alle möglichen Überlappungen der Wörter $\phi(\ell)$ und $\phi(\lhd)s$, wobei $|s| = n + 5$ und $s \notin \{\phi(x) \mid x \in \Gamma\}$ gilt, betrachten. Offensichtlich ist $\phi(\lhd)$ kein Suffix von $\phi(\ell)$. Also kann der Fall, daß sich der Präfix $\phi(\lhd)$ von $\phi(\lhd)s$ mit einem Vorkommen von $\phi(\lhd)$ in $\phi(\ell)$ deckt, nicht auftreten, da dann s mit einem Wort der Form $\phi(x)$ für ein $x \in \Gamma$ übereinstimmen müßte, siehe die folgende Graphik für den Fall $\ell = q \lhd \$\$$ (d.h. d_1 ist die Regel $\sigma(5a)$):

	$\phi(\lhd)$	s	
$\phi(q)$	$\phi(\lhd)$	$\phi(\$)$	$\phi(\$)$

Aufgrund von Lemma 2.5.2 ist also nur die folgende Überlappung zwischen $\phi(\triangleleft)s$ und $\phi(\ell)$ möglich: $\phi(\triangleleft)u\phi(\ell)$, wobei $s = uv$, $\phi(\ell) = v\ell'$ und $u \neq 1 \neq v$, siehe auch die folgende Graphik:



Es ergibt sich hieraus das kritische Paar $((\phi(0)\ell', c^i), (\phi(\triangleleft)u\phi(r), 1))$. Es gilt natürlich $(\phi(0)\ell', c^i) \to^*_{\{\sigma(1c),(6b)\}} \phi(0)$. Weiter folgt aus Lemma 2.5.2 und $0 < |u| < n+5$, daß der Präfix von $u\phi(r)$ der Länge $n+5$ (welcher existiert, da $r \neq 1$ gilt) nicht zu $\{\phi(x) \mid x \in \Gamma\}$ gehört, denn dieser Präfix besitzt eine echte Überlappung mit $\phi(r)$. Dies impliziert schließlich auch $\phi(\triangleleft)u\phi(r) \to_{(6c)}\to^*_{(6b)} \phi(0)$. Schließlich betrachten wir noch den Fall, daß die Situation $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1)$ von zwei Regeln d_0 und d_1 aus $\sigma(\mathcal{R})$ erzeugt wird. Sei d_i von der Gestalt $(\phi(\ell_i), c^{k_i}) \to \phi(r_i)$, wobei $k_i \in \{0,1\}$ gilt. Sei $\boldsymbol{t} = (t, c^k)$ für ein $k \geq 0$. Ist t eine Überlappung von $\phi(\ell_0)$ und $\phi(\ell_1)$, so folgt aus Lemma 2.5.2, daß diese Überlappung aus einer Überlappung von ℓ_0 und ℓ_1 resultiert, d.h. es gilt $t = \phi(s)$ für ein $s \in \Gamma^*$. In diesem Fall gilt also $\boldsymbol{t} = \sigma(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{t}_0 = \sigma(\boldsymbol{s}_0)$ und $\boldsymbol{t}_1 = \sigma(\boldsymbol{s}_1)$, wobei $(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$ gilt. Da $\mathcal{R}$ konfluent ist, existiert ein $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{s}_0 \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{s}_1 \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$. Anwendung von σ ergibt $\boldsymbol{t}_0 = \sigma(\boldsymbol{s}_0) \to^*_{\mathcal{P}} \sigma(\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{t}_1 = \sigma(\boldsymbol{s}_1) \to^*_{\mathcal{P}} \sigma(\boldsymbol{u})$. Es genügt somit den Fall zu betrachten, daß $k_0 = k_1 = k = 1$ gilt, und t disjunkt von $\phi(\ell_0)$ und $\phi(\ell_1)$ erzeugt wird. Der Fall, daß d_0 oder d_1 die Regel $\sigma(1c)$ ist, ist klar. Also bleibt nur noch der Fall übrig, daß d_0 und d_1 beide zu den Regeln σ(3a) und σ(3b) gehören. Die so erzeugten kritischen Situationen entsprechen den Fällen (7) bis (10) im Beweis von Lemma 3.3.3. Die zu Fall (7), (8) und (10) korrespondierenden Fälle können unter Benutzung der Regeln (6a), (6b) und (6e) völlig analog zu den entsprechenden Fällen aus dem Beweis von Lemma 3.3.3 behandelt werden. Der einzige noch zu behandelnde Fall ist somit das kritische Paar $(\phi(\triangleright q_0 w \triangleleft)v\phi(B),\ \phi(\triangleright A^{|w|+2})v\phi(0))$, wobei $v \in \{a,b\}^*$ beliebig ist. Der Fall $v = \phi(u)$ für ein Wort $u \in \Gamma^*$ ist klar, da wir dann ein Paar der Form $(\phi(s_0), \phi(s_1))$ mit $(s_0, s_1) \in \mathrm{CP}(\mathcal{R})$ vorliegen haben. Wir können also annehmen, daß v nicht zum Bildbereich von ϕ gehört. Sei etwa $v = \phi(v')s$ für ein $v' \in \Gamma^*$ und ein Wort $s \in \{a,b\}^+$, daß keinen Präfix der Form $\phi(x)$ mit $x \in \Gamma$ hat. Mittels Regel (6a) läßt sich $\phi(\triangleright A^{|w|+2})v\phi(0)$ auf $\phi(0)$ reduzieren. Wir müssen zeigen, daß das gleiche auch für das Wort $\phi(\triangleright q_0 w \triangleleft v')s\phi(B)$ gilt. Gilt $v' = \$^m y v''$ für ein $m \geq 0$, $y \in \Gamma \backslash \{\$\}$ und $v'' \in \Gamma^*$, so können wir die Argumente aus Fall 2 am Ende des Beweises von Lemma 3.3.3 benutzen. Es genügt also, alle Wörter der Form $\phi(\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m)s\phi(B)$ mit $m \geq 0$ zu betrachten. Durch genügend lange Simulation von $\mathcal{M}$ erhalten wir

$$\phi(\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m)s\phi(B) \to^*_{\mathcal{P}} \phi(\triangleright u q a_1 \$^{i_1} a_2 \$^{i_2} \cdots a_{l-1} \$^{i_{l-1}} a_l \$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}})s\phi(B),$$

wobei $u \in \Sigma^*$, $q \in Q$, $l \geq 0$, $a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$ und $i_1, \ldots, i_{l+1} \in \{0, 1\}$ gilt. Da $s \neq 1$ keinen Präfix der Form $\phi(x)$ für ein $x \in \Gamma$ hat, gehört der Präfix von $s\phi(B)$ der Länge $n + 5$ nicht zu $\{\phi(x) \mid x \in \Gamma\}$. Wir können somit die Regel (6c) oder die Regel (6d) anwenden und den Faktor $\phi(0)$ erzeugen. Das resultierende Wort kann dann mittels der Regeln (6a) und (6b) auf $\phi(0)$ reduziert werden. $\square$

Es ist zu beachten, daß die Regeln in $\mathcal{P}$ jeweils nur in einer Komponente längenreduzierend sind und in der anderen Komponente längenerhaltend sind. In Abschnitt 6.3 (Korollar 6.3.3 bzw. Beispiel 6.3.4) werden wir hingegen zeigen, daß Konfluenz für Spurersetzungssysteme über direkten Produkten von freien Monoiden, die in jeder Komponente längenreduzierend sind, entscheidbar ist. Mit der obigen Bemerkung liefert dies eine sehr scharfe Grenze zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit für das Konfluenzproblem für längenreduzierende Spurersetzungssysteme über direkten Produkten von freien Monoiden.

Der Fall $a - c \quad b$

In diesem Abschnitt behandeln wir Unabhängigkeitsalphabete der Form

$$(\Sigma_n, I_n) = (\{a, c, b_1, \ldots, b_n\}, \{(a, c), (c, a)\}),$$

wobei $n > 0$ gilt. Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß das Problem $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_1, I_1))$ unentscheidbar ist. Dieses Resultat werden wir in drei Schritten beweisen. Zuerst zeigen wir, daß eine Verschärfung von $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n))$ für ein bestimmtes $n > 2$ unentscheidbar ist (Lemma 3.3.6). In einem zweiten Schritt werden wir die $n > 2$ vielen Symbole $b_1, \ldots, b_n$ mittels der zwei Symbole b_1 und b_2 kodieren (Lemma 3.3.7) und so die Unentscheidbarkeit einer Verschärfung von $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_2, I_2))$ beweisen. In einem letzten Schritt werden wir schließlich die zwei Symbole b_1 und b_2 mittels b_1 und den zwei kommutierenden Symbolen a und c kodieren (Lemma 3.3.8). Für diesen letzten Schritt wird es wichtig sein, daß wir in den zwei Schritten zuvor Verschärfungen von $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n))$ bzw. $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_2, I_2))$ betrachtet haben. Die Aufteilung der gesamten Kodierung in zwei Schritte wird den Beweis übersichtlicher gestalten. In beiden Schritten werden wir das Kodierungslemma 2.5.1 sowie das folgende Lemma 3.3.5 benutzen, welches sich auf Spurersetzungssysteme anwenden läßt, welche die folgende Eigenschaft (B) erfüllen.

> Ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n)$ $(n > 0)$ erfüllt die Bedingung (B), falls für alle $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{R})$ gilt: $\{b_1, \ldots, b_n\} \cap alph(\boldsymbol{\ell}) \neq \emptyset$.

Offensichtlich erfüllt ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n)$, welches die Bedingung (B) erfüllt, auch die Bedingung (A): (i) Es kann kein $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{R})$ und kein $b \in \Sigma_n$ mit $b\, I\, \boldsymbol{\ell}$ existieren. Also erfüllt $\mathcal{R}$ die Bedingung (A1). (ii) Für $\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1 \in dom(\mathcal{R})$ können keine Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_i \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0,1\}$ und $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$ existieren, denn entweder $\boldsymbol{p}_0$ oder $\boldsymbol{q}_0$ enthält ein Symbol aus $\{b_1, \ldots, b_n\}$, welches dann von allen anderen Symbolen abhängig ist. Im folgenden sei $\underline{a} = c$ und $\underline{c} = a$. Für $x \in \{a, c\}$ gilt also $x\, I_n\, \underline{x}$.

Lemma 3.3.5. Sei $n > 0$. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n)$, welches die Bedingung (B) erfüllt. Dann gilt $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$ genau dann, wenn Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$, natürliche Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \zeta > 0$, Spuren $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$ sowie $x, y \in \{a, c\}$ existieren so, daß (bis auf Vertauschung von $\boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t}_1$) einer der folgenden sechs Fälle gilt:

(1) $\boldsymbol{\ell}_0 = x^\alpha \boldsymbol{s} y^\gamma$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \underline{x}^\beta \boldsymbol{s} \underline{y}^\zeta$, $\boldsymbol{t} = \underline{x}^\beta x^\alpha \boldsymbol{s} y^\gamma \underline{y}^\zeta = x^\alpha \underline{x}^\beta \boldsymbol{s} \underline{y}^\zeta y^\gamma$, $\boldsymbol{t}_0 = \underline{x}^\beta \boldsymbol{r}_0 \underline{y}^\zeta$, $\boldsymbol{t}_1 = x^\alpha \boldsymbol{r}_1 y^\gamma$

(2) $\boldsymbol{\ell}_0 = x^\alpha \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \underline{x}^\beta \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t} = \underline{x}^\beta x^\alpha \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1 = x^\alpha \underline{x}^\beta \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_0 = \underline{x}^\beta \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_1 = x^\alpha \boldsymbol{r}_1$

(3) $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{s} x^\alpha$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \underline{x}^\beta$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} x^\alpha \underline{x}^\beta = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \underline{x}^\beta x^\alpha$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}_0 \underline{x}^\beta$, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{r}_1 x^\alpha$

(4) $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{q}_0$

(5) $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{r}_1$

(6) $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0 x^\alpha$, $\boldsymbol{\ell}_1 = x^\alpha \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_0 x^\alpha \underline{x}^\beta \boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0 \underline{x}^\beta x^\alpha \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{r}_0 \underline{x}^\beta \boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0 \underline{x}^\beta \boldsymbol{r}_1$

Es ist zu beachten, daß sich die Fälle (4) und (6) nicht gegenseitig ausschließen.

Beweis. Gilt einer der sechs Fälle aus dem Lemma, so ist es leicht zu sehen, daß dann $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$ gilt. Gelte nun umgekehrt $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$. Es existieren also Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Spuren $\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{q}_i$, $\boldsymbol{w}_i$ $(i \in \{0,1\})$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$ mit:

- $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$
- $\boldsymbol{p}_0 \, I_n \, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0 \, I_n \, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I_n \, \boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{s} \, I_n \, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I_n \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1 \, I_n \, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_1$
- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$,
  $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$

Wir können nun die folgenden Fälle unterscheiden:
Fall 1: $\boldsymbol{w}_0 = 1 = \boldsymbol{w}_1$: Dann gilt also $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0$.
Fall 1.1: $\boldsymbol{p}_0 \neq 1 \neq \boldsymbol{p}_1$: Wegen $\boldsymbol{p}_0 \, I_n \, \boldsymbol{p}_1$ existieren $x \in \{a, c\}$ und $\alpha, \beta > 0$ mit $\boldsymbol{p}_0 = x^\alpha$ und $\boldsymbol{p}_1 = \underline{x}^\beta$.
Fall 1.1.1: $\boldsymbol{q}_0 \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_1$: Dann gilt auch $\boldsymbol{q}_0 = y^\gamma$ und $\boldsymbol{q}_1 = \underline{y}^\zeta$ für bestimmte $y \in \{a, c\}$ und $\gamma, \zeta > 0$, und wir erhalten Typ (1) aus dem Lemma.
Fall 1.1.2: $\boldsymbol{q}_0 = 1$: Wir erhalten Typ (2). Der Fall $\boldsymbol{q}_1 = 1$ ist symmetrisch.
Fall 1.2: $\boldsymbol{p}_0 = 1$ (der Fall $\boldsymbol{p}_1 = 1$ ist symmetrisch):
Fall 1.2.1: $\boldsymbol{q}_0 \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_1$: Es folgt $\boldsymbol{q}_0 = x^\alpha$ und $\boldsymbol{q}_1 = \underline{x}^\beta$ für bestimmte $x \in \{a, c\}$ und $\alpha, \beta > 0$. Wir erhalten Typ (3).
Fall 1.2.2: $\boldsymbol{q}_1 = 1$: Wir erhalten Typ (4).
Fall 1.2.3: $\boldsymbol{q}_0 = 1$: Wir erhalten Typ (5).
Fall 2: $\boldsymbol{w}_0 \neq 1$: Wegen $\boldsymbol{s} \neq 1$ und $\boldsymbol{s} \, I_n \, \boldsymbol{w}_0$ existieren $x \in \{a, c\}$ und $\alpha, \beta > 0$ mit $\boldsymbol{s} = x^\alpha$ und $\boldsymbol{w}_0 = \underline{x}^\beta$. Aber $\boldsymbol{s}\boldsymbol{w}_0 \, I_n \, \boldsymbol{w}_1$ impliziert dann $\boldsymbol{w}_1 = 1$. Wir behaupten, daß auch $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{q}_0 = 1$ gilt. Angenommen es gilt $\boldsymbol{p}_1 \neq 1$. Aus $\boldsymbol{w}_0 \, I_n \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{w}_0 = \underline{x}^\beta$ folgt $\boldsymbol{p}_1 = x^\gamma$ für ein $\gamma > 0$. Daher gilt $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1 = x^\gamma x^\alpha \boldsymbol{q}_1$. Da aber $\boldsymbol{\ell}_1$ wegen Bedingung (B) ein Symbol aus $\{b_1, \ldots, b_n\}$ enthalten muß, gilt $\boldsymbol{q}_1 \neq 1$. Wegen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_0 x^\alpha \boldsymbol{q}_0$ muß aber auch $\boldsymbol{p}_0$ oder $\boldsymbol{q}_0$ ein Symbol aus $\{b_1, \ldots, b_n\}$ enthalten. Die erste Alternative widerspricht $\boldsymbol{p}_0 \, I_n \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_1 \neq 1$, wohingegen die zweite Alternative $\boldsymbol{q}_0 \, I_n \, \boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_1 \neq 1$ widerspricht. Es folgt somit $\boldsymbol{p}_1 = 1$. Analog kann $\boldsymbol{q}_0 = 1$ gezeigt werden. Wir erhalten somit Typ (6). Der Fall $\boldsymbol{w}_1 \neq 1$ ist symmetrisch. □

Wir werden nun zeigen, daß eine Verschärfung von $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n))$ für ein bestimmtes $n > 2$ unentscheidbar ist. Sei hierzu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Box, \delta, q_0, q_f)$ die deterministische universelle Turing–Maschine aus dem letzten Abschnitt, und sei $w \in (\Sigma \backslash \{\Box\})^+$ eine nicht–leere Eingabe für $\mathcal{M}$. Sei $\Gamma = Q \cup \Sigma \cup \{0, \triangleright, \triangleleft, A, B, C, \$\}$. Auf Γ definieren wird die Unabhängigkeitsrelation I durch $I = \{(\$, B), (B, \$)\}$). Das Unabhängigkeitsalphabet (Γ, I) ist also von der Form (Σ_n, I_n) für ein $n > 2$. Wir definieren das SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ durch die Regeln in Abbildung 3.4, wobei der Wert der Konstanten $\omega \geq 2$

(1) $x0\$ \to 0\$$ für $x \in \Gamma$	(2) $\triangleleft\$^k C\$ \to 0\$$ für $k \in \{0, \dots, \omega - 1\}$
(3a) $A^{\lvert w\rvert+3}B \to \triangleright q_0 w \triangleleft$ (3b) $BC\$ \to 0\$$	(4) $a\$^k\beta\$^\omega \to a\$^{k+1}\beta$ für $k \in \{0, \dots, \omega - 1\}$, $a \in \Sigma$ und $\beta \in \Sigma \cup \{\triangleleft\}$

(5a) $q \triangleleft \$^\omega \to a'p\triangleleft$ falls $\delta(q, \Box) = (p, a', R)$
(5b) $bq \triangleleft \$^\omega \to pba'\triangleleft$ falls $\delta(q, \Box) = (p, a', L)$, $b \in \Sigma$
(5c) $qa\$^\omega \to a'p$ falls $\delta(q, a) = (p, a', R)$
(5d) $bqa\$^\omega \to pba'$ falls $\delta(q, a) = (p, a', L)$, $b \in \Sigma$
(5e) $\triangleright qa\$^\omega \to \triangleright p\Box a'$ falls $\delta(q, a) = (p, a', L)$

Abbildung 3.4: Das SES $\mathcal{R}$ aus Lemma 3.3.6. Es ist zu beachten, daß $q \neq q_f$ in (5a) bis (5e) gilt.

später noch genauer festgelegt wird[8]. Es gelten offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{R}$ erfüllt die Bedingung (B).
- $\mathcal{R}$ ist längenreduzierend.
- Für alle $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ gilt $max(\boldsymbol{\ell}) \subseteq \{B, \$\}$ und $\boldsymbol{r} \neq 1$.

Lemma 3.3.6. $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\mathcal{M}$ nicht für die Eingabe w terminiert.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.3.3. Sei $\mathcal{R}_{4,5}$ das SES über $\mathbb{M}(\Gamma, I)$, welches nur aus den Regeln (4) und (5a) bis (5e) besteht. Angenommen die Maschine $\mathcal{M}$ terminiert für die Eingabe w. Dann existieren $m \geq 0$, $u \in \Sigma^*$, $l \geq 0$, $a_1, \dots, a_l \in \Sigma$ und $k \geq \omega$ mit

$$[A^{|w|+3}B\$^m C\$]_I \to_{(3a)} \triangleright q_0 w \triangleleft \$^m C\$ \to^+_{\mathcal{R}_{4,5}} \triangleright u q_f a_1 \$^\omega a_2 \$^\omega \cdots a_{l-1}\$^\omega a_l \$^\omega \triangleleft \$^k C\$ = \boldsymbol{v}.$$

Da $\mathcal{M}$ sich nicht aus dem Endzustand q_f bewegen kann, ist keine der Regeln (5a) bis (5e) auf die Spur $\boldsymbol{v}$ anwendbar. Da weiter $k \geq \omega$ gilt, ist

[8] Das folgende Lemma 3.3.6 gilt für jedes $\omega \geq 2$.

Regel (2) nicht auf $\boldsymbol{v}$ anwendbar. Da schließlich auch die Regeln (1), (3a), (3b) und (4) nicht anwendbar sind, gilt $\boldsymbol{v} \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R})$. Da andererseits auch $[A^{|w|+3}B\$^m C\$]_I = [A^{|w|+3}\$^m BC\$]_I \rightarrow_{(3b)} A^{|w|+3}\$^m 0\$ \rightarrow_{(1)}^{+} 0\$ \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R})$ gilt, ist $\mathcal{R}$ nicht konfluent.

Wir nehmen nun an, daß die Maschine $\mathcal{M}$ nicht für die Eingabe w terminiert. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (B) erfüllt und damit auch die Bedingung (A) erfüllt, genügt es, alle kritischen Paare zu untersuchen. Sei also $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$ eine kritische Situation. Nach Lemma 3.3.5 erfüllen $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t}_1$ einen der sechs dort aufgelisteten Fälle. Dies führt zu den folgenden drei Typen von kritischen Situationen:

Eine kritische Situation vom Typ (2) (nach der Auflistung in Lemma 3.3.5) ergibt sich aus $[B\$0\$]_I \rightarrow_{(1)} B0\$$ und $[B\$0\$]_I = [\$B0\$]_I \rightarrow_{(1)} \$0\$$. Das so resultierende kritische Paar $(B0\$, \$0\$)$ ist natürlich wegen Regel (1) konfluent.

Eine kritische Situation vom Typ (6) (nach der Auflistung in Lemma 3.3.5) ergibt sich folgendermaßen. Sei $d \in \mathcal{R}$ eine beliebige Regel aus $\mathcal{R}$, welche von der Form $\boldsymbol{\ell}x \rightarrow \boldsymbol{r}$ für ein $x \in \{B, \$\}$ sei. Dann gilt für alle $m \geq 0$: $\boldsymbol{\ell}[\underline{x}^m x0\$]_I \rightarrow_{(1)} \boldsymbol{\ell}\underline{x}^m 0\$$ und $\boldsymbol{\ell}[\underline{x}^m x0\$]_I = \boldsymbol{\ell}[x\underline{x}^m 0\$]_I \rightarrow_d \boldsymbol{r}\underline{x}^m 0\$$. Auch das so resultierende kritische Paar $(\boldsymbol{\ell}\underline{x}^m 0\$, \boldsymbol{r}\underline{x}^m 0\$)$ ist wegen Regel (1) konfluent.

Der letzte Typ von möglichen kritischen Situationen ist wieder vom Typ (6). Er wird von den beiden Hauptregeln (3a) und (3b) wie folgt erzeugt:
$[A^{|w|+3}B\$^m C\$]_I \rightarrow_{(3a)} \triangleright q_0 w \triangleleft \$^m C\$$ und
$[A^{|w|+3}B\$^m C\$]_I = [A^{|w|+3}\$^m BC\$]_I \rightarrow_{(3b)} A^{|w|+3}\$^m 0\$$.
Es gilt $A^{|w|+3}\$^m 0\$ \rightarrow_{(1)}^{+} 0\$$. Also muß gezeigt werden, daß $\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m C\$ \rightarrow_{\mathcal{R}}^{+} 0\$$ für alle $m \geq 0$ gilt. Da die Maschine $\mathcal{M}$ nicht auf der Eingabe w terminiert, gilt

$$\triangleright q_0 w \triangleleft \$^m C\$ \rightarrow_{\mathcal{R}_{4,5}}^{*} \triangleright uqa_1\$^{i_1}a_2\$^{i_2} \cdots a_{l-1}\$^{i_{l-1}}a_l\$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}}C\$,$$

wobei $u \in \Sigma^*$, $q \in Q$, $l \geq 0$, $a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$ und $i_1, \ldots, i_{l+1} \in \{0, \ldots, \omega - 1\}$ gilt. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} &\triangleright\, uqa_1\$^{i_1}a_2\$^{i_2} \cdots a_{l-1}\$^{i_{l-1}}a_l\$^{i_l} \triangleleft \$^{i_{l+1}}C\$ \rightarrow_{(2)} \\ &\qquad\qquad \triangleright\, uqa_1\$^{i_1}a_2\$^{i_2} \cdots a_{l-1}\$^{i_{l-1}}a_l\$^{i_l}0\$ \rightarrow_{(1)}^{+} 0\$. \end{aligned}$$

Dies sind alle möglichen kritischen Situationen. Insbesondere führen die Regeln (5a) bis (5e) zu keinen weiteren kritischen Situationen, da $\mathcal{M}$ deterministisch ist. $\square$

Sei im folgenden $Q \cup \Sigma \cup \{0, \triangleright, \triangleleft, A, C\} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\{B, \$\} = \{a, c\}$, d.h. $\mathcal{R}$ ist ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma_n, I_n)$. Sei $\phi : \Sigma_n^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ definiert durch

$$\phi(a) = a, \quad \phi(c) = c, \quad \phi(b_i) = b_1 b_2 b_1^{i+1} b_2^{n-i+2} \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dies ist der Morphismus aus Lemma 2.5.2, falls wir dort $\{a_1, \ldots, a_m\} = \{a, c\}$ setzen. Also ist ϕ injektiv. Da $\phi(x) \, I_2 \, \phi(y)$ aus $x \, I_n \, y$ folgt, läßt sich ϕ zu einem Monoidmorphismus $\sigma : \mathbb{M}(\Sigma_n, I_n) \longrightarrow \mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$ durch $\sigma([s]_{I_n}) = [\phi(s)]_{I_2}$ erweitern. Für das SES $\sigma(\mathcal{R})$ über $\mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$ gelten offensichtlich wie für $\mathcal{R}$ die folgenden Aussagen:

- $\sigma(\mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung (B).
- Für alle $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ gilt $max(\sigma(\boldsymbol{\ell})) \subseteq \{a, c\}$ und $\sigma(\boldsymbol{r}) \neq 1$.

Wählen wir außerdem den Wert der Konstanten $\omega \geq 2$ im SES $\mathcal{R}$ groß genug, so ist das SES $\sigma(\mathcal{R})$ auch längenreduzierend[9]. In [Ber96] wurde bereits die Unentscheidbarkeit des Entscheidungsproblems KOLR($\mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$) bewiesen. Dieses Resultat folgt auch sofort aus dem folgenden Lemma.

Lemma 3.3.7. $\sigma(\mathcal{R})$ ist genau dann konfluent, wenn $\mathcal{M}$ nicht für die Eingabe w terminiert.

Beweis. Wegen Lemma 3.3.6 genügt es, die folgende Behauptung zu zeigen. *Behauptung*: $\mathcal{R}$ ist genau dann konfluent, wenn $\sigma(\mathcal{R})$ konfluent ist.

Für den Beweis dieser Behauptung können wir Lemma 2.5.1 benutzen. Dazu müssen die vier Bedingungen aus Lemma 2.5.1 gezeigt werden. Die Injektivität von σ folgt sofort aus der folgenden Aussage in Verbindung mit der Injektivität von ϕ.

$$\text{Gilt } \phi(s) \equiv_{I_2} s', \text{ so existiert ein } t \in \Sigma_n^* \text{ mit } t \equiv_{I_n} s \text{ und } \phi(t) = s'. \qquad (3.2)$$

Diese Aussage läßt sich sehr einfach durch eine Induktion über die Anzahl der Kommutationen, die das Wort $\phi(s)$ in das Wort s' überführen, zeigen. Wie bereits gesagt, ist $\sigma(\mathcal{R})$ längenreduzierend und erfüllt außerdem die Bedingung (B) und somit auch die Bedingung (A). Also ist auch die zweite

[9]Die σ–Kodierungen der Regeln (1), (2), (3a), (3b) und (4) aus $\mathcal{R}$ sind für jede Wahl von $\omega \geq 2$ längenreduzierend, da für jede solche Regel $\boldsymbol{\ell} \to \boldsymbol{r}$ gilt, daß $\boldsymbol{\ell}$ mindestens soviele Symbole aus $\{b_1, \ldots, b_n\} = Q \cup \Sigma \cup \{0, \triangleright, \triangleleft, A, C\}$ enthält wie $\boldsymbol{r}$. Dies gilt jedoch nicht mehr für die Regeln (5a) bis (5e).

Bedingung aus Lemma 2.5.1 erfüllt. Zum Beweis der dritten Bedingung zeigen wir die folgende allgemeinere Aussage für alle $u', v' \in \Sigma_2^*$ und $s, \ell \in \Sigma_n^+$:

$$\text{Gilt } \phi(s) \equiv_{I_2} u'\phi(\ell)v', \text{ so existieren } u, v \in \Sigma_n^* \text{ mit } u' = \phi(u) \text{ und } v' = \phi(v). \tag{3.3}$$

Es ist zu beachten, daß (3.3) nicht für $\ell = 1$ gilt. Gelte also $\phi(s) \equiv_{I_2} u'\phi(\ell)v'$ und $\ell \neq 1$. Indem wir s eventuell durch ein anderes Wort ersetzen, welches die gleiche Spur repräsentiert, können wir wegen (3.2) $\phi(s) = u'\phi(\ell)v'$ annehmen. Aufgrund von Lemma 2.5.2 folgt nun wie gewünscht die Existenz von $u, v \in \Sigma_n^*$ mit $u' = \phi(u)$ und $v' = \phi(v)$.

Es muß schließlich noch die vierte Bedingung aus Lemma 2.5.1 gezeigt werden. Gelte also $\boldsymbol{t'} \in \mathrm{CT}(\sigma(\mathcal{R}))$. Wir müssen zeigen, daß dann ein $\boldsymbol{t} \in \mathbb{M}(\Sigma_n, I_n)$ mit $\sigma(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t'}$ existiert. Da $\sigma(\mathcal{R})$ die Bedingung (B) erfüllt, genügt es, alle in Lemma 3.3.5 angegebenen sechs Typen für $\boldsymbol{t'}$ zu überprüfen. Die ersten drei Typen und Typ (5) sind einfach zu behandeln, da für diese Typen stets $\boldsymbol{t'} = x^\alpha \sigma(\boldsymbol{\ell}) y^\beta = \sigma(x^\alpha \boldsymbol{\ell} y^\beta)$ für bestimmte $x, y \in \{a, c\}$, $\boldsymbol{\ell} \in \mathit{dom}(\mathcal{R})$ und $\alpha, \beta \geq 0$ gilt. Sei nun $\boldsymbol{t'}$ vom Typ (4), d.h. gelte $\boldsymbol{t'} = \boldsymbol{p's'q'}$, wobei $\sigma(\boldsymbol{\ell}_0) = \boldsymbol{p's'}$ und $\sigma(\boldsymbol{\ell}_1) = \boldsymbol{s'q'}$ gilt. Gelte $\boldsymbol{\ell}_i = [\ell_i]_{I_n}$, $\boldsymbol{s'} = [s']_{I_2}$, $\boldsymbol{p'} = [p']_{I_2}$ und $\boldsymbol{q'} = [q']_{I_2}$, d.h. $\phi(\ell_0) \equiv_{I_2} p's'$, $\phi(\ell_1) \equiv_{I_2} s'q'$. Wegen (3.2) können wir $\phi(\ell_0) = p's'$ und $\phi(\ell_1) = s'q'$ annehmen. Aus Aussage (3) in Lemma 2.5.2 folgt dann, daß $s, p, q \in \Sigma_n^*$ mit $\phi(s) = s'$, $\phi(p) = p'$ und $\phi(q) = q'$ existieren. Es folgt $\boldsymbol{t'} = \boldsymbol{p's'q'} = [p's'q']_{I_2} = \sigma([psq]_{I_n})$.

Schließlich ist noch der Fall, daß $\boldsymbol{t'}$ vom Typ (6) ist, zu untersuchen, d.h $\boldsymbol{t'} = \boldsymbol{p'} x^\alpha \underline{x}^\beta \boldsymbol{q'}$, wobei $x \in \{a, c\}$, $\sigma(\boldsymbol{\ell}_0) = \boldsymbol{p'} x^\alpha$ und $\sigma(\boldsymbol{\ell}_1) = x^\alpha \boldsymbol{q'}$ gilt. Gelte $\boldsymbol{\ell}_i = [\ell_i]_{I_n}$, $\boldsymbol{p'} = [p']_{I_2}$ und $\boldsymbol{q'} = [q']_{I_2}$, d.h. $\phi(\ell_0) \equiv_{I_2} p'x^\alpha$ und $\phi(\ell_1) \equiv_{I_2} x^\alpha q'$. Wegen (3.2) können wir $\phi(\ell_0) = p'x^\alpha$ und $\phi(\ell_1) = x^\alpha q'$ annehmen. Aus $x \in \{a, c\}$, d.h. $\phi(x) = x$, folgt $p' = \phi(p)$ und $q' = \phi(q)$ für bestimmte $p, q \in \Sigma_n^*$ und damit $\boldsymbol{t'} = [p'x^\alpha \underline{x}^\beta q']_{I_2} = [\phi(p) x^\alpha \underline{x}^\beta \phi(q)]_{I_2} = \sigma([px^\alpha \underline{x}^\beta q]_{I_n})$. ☐

Nach den letzten zwei vorbereitenden Lemmata können wir nun schließlich das folgende Lemma beweisen.

Lemma 3.3.8. $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma_1, I_1))$ ist unentscheidbar.

Beweis. Der Beweis benutzt eine Kodierungsfunktion, die der Kodierungsfunktion aus Lemma 2.5.2 ähnlich ist. Im folgenden bezeichnen wir das Symbol $b_1 \in \Sigma_1$ kurz mit b. Das SES $\sigma(\mathcal{R})$ über $\mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$ aus Lemma 3.3.7

bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$. Wir definieren einen injektiven Monoidmorphismus $\varphi : \Sigma_2^* \longrightarrow \Sigma_1^*$ durch

$$\varphi(a) = a, \quad \varphi(c) = c, \quad \varphi(b_1) = bbab, \quad \varphi(b_2) = bbcb.$$

Die Injektivität von φ ist offensichtlich. Allgemeiner gilt die folgende Kürzungseigenschaft, die durch eine Induktion über $|t|$ bewiesen werden kann:

$$\begin{aligned}&\text{Aus } \varphi(s) = \varphi(t)u \text{ (bzw. } \varphi(s) = u\varphi(t)) \text{ folgt}\\ &\qquad s = tv \text{ (bzw. } s = vt) \text{ und } u = \varphi(v) \text{ für ein } v \in \Sigma_2^*.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Da $\varphi(x)\, I_1\, \varphi(y)$ aus $x\, I_2\, y$ folgt, läßt sich φ zu einem Monoidmorphismus $\tau : \mathbb{M}(\Sigma_2, I_2) \longrightarrow \mathbb{M}(\Sigma_1, I_1)$ durch $\tau([s]_{I_2}) = [\varphi(s)]_{I_1}$ erweitern. Offensichtlich gelten auch für das SES $\tau(\mathcal{P})$ über $\mathbb{M}(\Sigma_1, I_1)$ die folgenden Eigenschaften:

- $\tau(\mathcal{P})$ erfüllt die Bedingung (B).
- Für alle $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{P}$ gilt $max(\tau(\boldsymbol{\ell})) \subseteq \{a, c\}$ und $\tau(\boldsymbol{r}) \neq 1$.

Wählen wir außerdem den Wert der Konstanten $\omega \geq 2$ im SES $\mathcal{R}$ aus Lemma 3.3.6 groß genug, so ist auch das SES $\tau(\mathcal{P}) = \tau(\sigma(\mathcal{R}))$ längenreduzierend. Wegen Lemma 3.3.7 genügt es, die folgende Behauptung zu zeigen.
Behauptung: $\mathcal{P}$ ist genau dann konfluent, wenn $\tau(\mathcal{P})$ konfluent ist.

Zum Beweis dieser Behauptung benutzen wir Lemma 2.5.1. Es müssen also die vier Bedingungen aus Lemma 2.5.1 (für $\tau(\mathcal{P})$ anstatt $\sigma(\mathcal{R})$) gezeigt werden. Die Injektivität von τ folgt wieder aus der Injektivität von φ und der folgenden Aussage, die durch eine Induktion über die Anzahl der Kommutationen, die das Wort $\varphi(s)$ in das Wort s' überführen, gezeigt werden kann.

$$\text{Gilt } \varphi(s) \equiv_{I_1} s', \text{ so existiert ein } t \in \Sigma_2^* \text{ mit } t \equiv_{I_2} s \text{ und } \varphi(t) = s'. \tag{3.5}$$

Wie oben bereits erwähnt ist $\tau(\mathcal{P})$ längenreduzierend und erfüllt die Bedingung (A). Anstatt der dritten Bedingung aus Lemma 2.5.1 beweisen wir die folgende allgemeinere Aussage für alle $s, \ell \in \Sigma_2^*$ und $s_1, s_2 \in \Sigma_1^*$:

$$\begin{aligned}&\text{Gilt } |\varphi(\ell)| \geq 2 \text{ und } \varphi(s) \equiv_{I_1} s_1\varphi(\ell)s_2, \text{ so existieren } u_1, u_2 \in \Sigma_2^* \text{ mit}\\ &\qquad s_1 = \varphi(u_1) \text{ und } s_2 = \varphi(u_2).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dies impliziert die dritte Bedingung aus Lemma 2.5.1, da $\boldsymbol{\ell} \notin \{a, c\}$ und damit $|\tau(\boldsymbol{\ell})| \geq 2$ für alle $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{P})$ gilt. Aussage (3.6) beweisen wir mittels der gleichen Strategie, die wir im Beweis von Lemma 2.5.2 angewendet haben. Gelte also $|\varphi(\ell)| \geq 2$ und $\varphi(s) \equiv_{I_1} s_1\varphi(\ell)s_2$. Wegen (3.5) können wir $\varphi(s) = s_1\varphi(\ell)s_2$ annehmen. Wir wählen nun die Faktorisierung der Form $s_1 = \varphi(u)t$, wobei u maximale Länge unter allen solchen Faktorisierungen hat. Aus $\varphi(s) = s_1\varphi(\ell)s_2 = \varphi(u)t\varphi(\ell)s_2$ folgt mit der Kürzungseigenschaft (3.4), daß ein $v \in \Sigma_2^*$ mit $t\varphi(\ell)s_2 = \varphi(v)$ und $v \neq 1$ (wegen $\ell \neq 1$) existiert. Wir behaupten, daß $t = 1$ gilt, was dann $s_1 = \varphi(u)$ impliziert. Angenommen es gilt $t \neq 1$. Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich des ersten Symbols von $v \neq 1$ durch. Gilt $v = aw$ oder $v = cw$, so gilt auch $t = a\cdots$ oder $t = c\cdots$, was der Maximalität von u widerspricht. Es gilt also $v = b_1w$ oder $v = b_2w$. O.B.d.A. nehmen wir $v = b_1w$ für ein $w \in \Sigma_2^*$ an, d.h. $t\varphi(\ell)s_2 = \varphi(v) = bbab\varphi(w)$. Das Wort $t \neq 1$ muß nun wegen der Maximalität von u ein echter Präfix von $bbab$ sein. Den Fall $t = b$ können wir ausschließen, da sonst $\varphi(\ell) = ba\cdots$ gelten würde, was der Definition von φ widerspricht. Gilt $t = bb$, so folgt $\varphi(\ell)s_2 = ab\varphi(w)$. Aus $|\varphi(\ell)| \geq 2$ folgt $\varphi(\ell) = ab\cdots$. Da weiter $\varphi(\ell) = ab$ nicht möglich ist, muß $w \neq 1$ gelten. Gilt $w = a\cdots$ oder $w = c\cdots$, so folgt $\varphi(\ell) = aba\cdots$ bzw. $\varphi(\ell) = abc\cdots$, was wieder nicht möglich ist. Gilt andererseits $w = b_1\cdots$ oder $w = b_2\cdots$, so folgt $\varphi(\ell) = abbb\cdots$, was ebenfalls nicht möglich ist. Schließlich können wir den Fall $t = bba$ mit den gleichen Argumenten ausschließen. Also gilt $s_1 = \varphi(u)$, d.h. $\varphi(s) = \varphi(u\ell)s_2$. Aus (3.4) folgt somit, daß ein u_2 mit $s_2 = \varphi(u_2)$ existiert. Die Behauptung (3.6) ist somit bewiesen.

Schließlich muß noch die vierte Bedingung aus Lemma 2.5.1 überprüft werden. Gelte $\boldsymbol{t} \in \mathrm{CT}(\tau(\mathcal{P}))$. Wir müssen ein ein $\boldsymbol{t'} \in \mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$ mit $\tau(\boldsymbol{t'}) = \boldsymbol{t}$ finden. Da $\tau(\mathcal{P})$ die Bedingung (B) erfüllt, genügt es, alle in Lemma 3.3.5 aufgeführten Fälle zu untersuchen. Die ersten drei Typen und Typ (5) und (6) aus Lemma 3.3.5 können mit den gleichen Argumenten, die im Beweis von Lemma 3.3.7 an den entsprechenden Stellen benutzt wurden, behandelt werden. Sei nun $\boldsymbol{t}$ vom Typ (4), d.h. $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{psq}$, wobei $\tau(\boldsymbol{\ell}_0) = \boldsymbol{ps}$, $\tau(\boldsymbol{\ell}_1) = \boldsymbol{sq}$ und $\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1 \in dom(\mathcal{P})$ gilt. Gelte weiter $\boldsymbol{\ell}_i = [\ell_i]_{I_2}$, $\boldsymbol{s} = [s]_{I_1}$, $\boldsymbol{p} = [p]_{I_1}$ und $\boldsymbol{q} = [q]_{I_1}$, d.h. $\varphi(\ell_0) \equiv_{I_1} ps$ und $\varphi(\ell_1) \equiv_{I_1} sq$. Wegen (3.2) können wir $\varphi(\ell_0) = ps$ und $\varphi(\ell_1) = sq$ annehmen. Wir wählen nun die Faktorisierung der Form $s = \varphi(u)v$, wobei u maximale Länge unter allen solchen Faktorisierungen hat. Es folgt $sq = \varphi(u)vq = \varphi(\ell_1)$ und $vq = \varphi(w)$ für ein $w \in \Sigma_2^*$. Wir behaupten $v = 1$. Angenommen es gilt $v \neq 1$ und damit $w \neq 1$. Aus $w = a\cdots$ oder $w = c\cdots$ folgt $v = a\cdots$ oder $v = c\cdots$, was der Maximalität von u

widerspricht. Also gilt $w = b_1 \cdots$ oder $w = b_2 \cdots$. O.B.d.A. gelte $w = b_1 \cdots$. Es folgt $vq = bbab \cdots$. Aus der Maximalität von u folgt, daß $v \neq 1$ ein echter Präfix von $bbab$ ist. Gilt $v = bba$, so folgt $\varphi(\ell_0) = ps = p\varphi(u)v = \cdots bba$, was nicht möglich ist. Gilt $v = b$ oder $v = bb$, so folgt $\varphi(\ell_0) = \cdots b$. Dies ist jedoch auch nicht möglich, denn $max(\boldsymbol{\ell}_0) = max([\ell_0]_{I_2}) \subseteq \{a, c\}$ impliziert $\varphi(\ell_0) = \cdots a$ oder $\varphi(\ell_0) = \cdots c$. Es sollte bemerkt werden, daß dies der einzige Punkt ist, wo die Tatsache $max(\boldsymbol{\ell}) \subseteq \{a, c\}$ für alle $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{P})$ benutzt wird. Es gilt also $v = 1$ und damit $s = \varphi(u)$, d.h. $\varphi(\ell_0) = p\varphi(u)$ und $\varphi(\ell_1) = \varphi(u)q$. Aus (3.4) ergeben sich $p', q' \in \Sigma_2^*$ mit $\varphi(p') = p$ und $\varphi(q') = q$. Es folgt $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{psq} = [psq]_{I_1} = \tau([p'uq']_{I_2})$. $\square$

3.3.2 Der allgemeine Fall

Ein konfluentes Semi–Thue System über einem Alphabet Σ bleibt konfluent, wenn wir ein zusätzliches Symbol, welches nicht in den Regeln von $\mathcal{R}$ auftaucht, zu Σ hinzufügen. Dieser triviale Sachverhalt ist für Spurersetzungssysteme im allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel aus [Die90b], S. 125, zeigt.

Beispiel 3.3.9. Sei (Γ, J) das folgende Unabhängigkeitsalphabet:

$$a — c — f — b — d$$

Sei (Σ, I) der folgende induzierte Teilgraph von (Γ, J):

$$a — c \qquad b — d$$

Sei $\mathcal{R} = \{ab \to c, cd \to a\}$. Wenn wir $\mathcal{R}$ als ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ betrachten, ist $\mathcal{R}$ konfluent, siehe [Die90b]. Es ist zu beachten, daß $\mathcal{R}$ nicht die Eigenschaft (A) erfüllt, und wir somit nicht Lemma 2.4.4 anwenden können. Andererseits kann jedoch auch durch eine direkte Anwendung von Lemma 2.2.2 leicht gezeigt werden, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Betrachten wir jedoch $\mathcal{R}$ als ein SES über $\mathbb{M}(\Gamma, J)$, so ist $\mathcal{R}$ nicht mehr konfluent. Hierzu betrachten wir die Spur $[cabfd]_J = [afcdb]_J$. Es gilt $[cabfd]_J \to_{\mathcal{R}} [ccfd]_J$ und $[afcdb]_J \to_{\mathcal{R}} [afab]_J$. Aus $[ccfd]_J = [cfcd]_J$ können wir nur die Spur $[cfa]_J$ ableiten, während aus $[afab]_J$ nur die Spur $[afc]_J \neq [cfa]_J$ abgeleitet werden kann. Also ist $\mathcal{R}$ nicht konfluent.

Das folgende Lemma ist somit keine Trivialität.

Lemma 3.3.10. Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeitsalphabet und sei $\Sigma \subseteq \Gamma$. Ist $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Gamma, I))$ entscheidbar, so ist auch $\mathrm{KOLR}_{\neq 1}(\mathbb{M}(\Sigma, I \cap (\Sigma \times \Sigma)))$ entscheidbar.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein längenreduzierendes SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I \cap (\Sigma \times \Sigma))$ mit $1 \notin \mathit{ran}(\mathcal{R})$. Wir beweisen das Lemma, indem wir ein längenreduzierendes SES $\mathcal{P}$ über $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ konstruieren so, daß $1 \notin \mathit{ran}(\mathcal{P})$ gilt, und $\mathcal{R}$ genau dann konfluent ist, wenn $\mathcal{P}$ konfluent ist. Der Fall $\Sigma = \Gamma$ ist trivial. Existiere also ein Symbol $0 \in \Gamma \backslash \Sigma$. Sei

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \cup \{[ab]_I \to 0 \mid a \in \Gamma \backslash \Sigma \ \text{ oder } \ b \in \Gamma \backslash \Sigma\}.$$

Es ist zu beachten, daß $\mathcal{P}$ längenreduzierend ist, und $1 \notin \mathit{ran}(\mathcal{P})$ gilt. Zuerst nehmen wir an, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Gelte $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{P}} \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{P}} \boldsymbol{u}$. Gilt $\mathit{alph}(\boldsymbol{s}) \subseteq \Sigma$, so folgt $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$, sowie $\mathit{alph}(\boldsymbol{t}), \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \Sigma$. Da $\mathcal{R}$ konfluent ist, existiert ein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Sigma, I \cap (\Sigma \times \Sigma))$ mit $\boldsymbol{t} \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$, was $\boldsymbol{t} \to^*_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to^*_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v}$ impliziert. Kommt andererseits ein Symbol aus $\Gamma \backslash \Sigma$ in $\boldsymbol{s}$ vor, so muß das gleiche auch für $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ gelten. Da außerdem $1 \notin \mathit{ran}(\mathcal{R})$ gilt, folgt $|\boldsymbol{t}| > 1$ oder $\boldsymbol{t} = 0$. Also kann $\boldsymbol{t}$ mittels $\mathcal{P}$ auf 0 reduziert werden. Das gleiche gilt auch für $\boldsymbol{u}$. Also ist $\mathcal{P}$ konfluent.

Sei nun $\mathcal{P}$ konfluent, und gelte $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$. Es folgt $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{P}} \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{P}} \boldsymbol{u}$. Da $\mathcal{P}$ konfluent ist, existiert ein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Gamma, I)$ mit $\boldsymbol{t} \to^*_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to^*_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v}$. Da Symbole aus $\Gamma \backslash \Sigma$ in $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$ nicht vorkommen, folgt $\boldsymbol{t} \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$. Also ist $\mathcal{R}$ konfluent. $\square$

Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen.

Satz 3.3.11. Das Entscheidungsproblem $\mathrm{KOLR}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ ist genau dann entscheidbar, wenn $I = \emptyset$ oder $I = (\Sigma \times \Sigma) \backslash \mathit{Id}_\Sigma$ gilt.

Beweis. Wie bereits früher erwähnt, ist für terminierende Semi–Thue Systeme und Vektorersetzungssysteme Konfluenz entscheidbar [BO81, BL81]. Sei nun $I \neq \emptyset$ und $I \neq (\Sigma \times \Sigma) \backslash \mathit{Id}_\Sigma$. Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{KOLR}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ unentscheidbar ist.

Wegen $I \neq \emptyset$ existieren $a, c \in \Sigma$ mit $a\, I\, c$ (und damit auch $a \neq c$). Angenommen es existiert ein $b \in \Sigma \backslash \{a, c\}$ mit $(a, b) \notin I$. Dann ist einer der beiden folgenden Graphen ein induzierter Teilgraph von (Σ, I):

$$a \text{---} c \text{---} b \qquad\qquad a \text{---} c \quad\ b$$

Aus Lemma 3.3.10 sowie Lemma 3.3.4 bzw. Lemma 3.3.8 folgt dann, daß KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) unentscheidbar ist. Also können wir davon ausgehen, daß $a\,I\,x$ für alle $x \in \Sigma \backslash \{a\}$ gilt. Aus $I \neq (\Sigma \times \Sigma) \backslash Id_\Sigma$ folgt jedoch, daß $b, c \in \Sigma$ mit $(b, c) \notin I$ und $b \neq c$ existieren. Da $a \neq b$ und $a \neq c$ gelten muß, ist der Graph

$$b — a — c$$

ein induzierter Teilgraph von (Σ, I). Aus Lemma 3.3.10 und Lemma 3.3.4 folgt, daß KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) wieder unentscheidbar ist. $\square$

Das negative Resultat aus Satz 3.3.11 kann sogar noch verschärft werden.

Lemma 3.3.12. Für jedes Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist die Menge aller Spurersetzungssysteme über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welche längenreduzierend aber nicht konfluent sind, rekursiv aufzählbar.

Beweis. Ein Semi–Algorithmus, der testet, ob ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ nicht konfluent ist, kann wie folgt arbeiten. Es werden alle Spuren $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit $\boldsymbol{s} \rightarrow_{\mathcal{R}} \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{s} \rightarrow_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}$ aufgezählt. Nun testen wir, ob eine Spur $\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{t} \rightarrow_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \rightarrow_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ existiert. Da $\mathcal{R}$ terminierend ist, ist dies entscheidbar. $\square$

Der folgende Satz ist nun eine unmittelbare Konsequenz des vorherigen Lemmas und Satz 3.3.11.

Satz 3.3.13. Gilt $I \neq \emptyset$ und $I \neq (\Sigma \times \Sigma) \backslash Id_\Sigma$, so ist KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) nicht semi–entscheidbar.

Kapitel 4

Monadische Systeme

In diesem sehr kurzen Kapitel geben wir obere Schranken für das Konfluenzproblem für monadische Semi–Thue Systeme und monadische Vektorersetzungssysteme an. Diese oberen Schranken verbessern die entsprechenden oberen Schranken für längenreduzierende Systeme aus dem vorherigen Kapitel. Die Frage, ob Konfluenz für beliebige monadische Spurersetzungssysteme entscheidbar ist, bleibt leider ungelöst.

4.1 Monadische Semi–Thue Systeme

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß KOMO(Σ^*) in AC^1 enthalten ist, sich also effizient parallelisieren läßt. Dieses Resultat folgt aus bekannten Resultaten über kontextfreie Grammatiken. Eine *kontextfreie Grammatik* G, kurz CFG, ist ein Tupel $G = (N, \Sigma, P, S)$, wobei N die Menge der *Nichtterminalsymbole* ist, Σ die Menge der *Terminalsymbole* ist, wobei $N \cap \Sigma = \emptyset$ gilt, $P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von *Produktionen* ist, und $S \in N$ das *Startsymbol* ist. Eine Produktion $(A, \alpha) \in P$ wird gewöhnlich in der Form $A \Rightarrow \alpha$ geschrieben. Für $A \in N$ wird mit $L(G, A)$ die Menge aller Wörter aus Σ^* bezeichnet, die sich aus A mittels der Produktionen aus P ableiten lassen. Die durch G definierte Sprache $L(G)$ ist $L(G, S)$. Eine kontextfreie Grammatik heißt 1–frei, falls keine Produktion der Form $A \Rightarrow 1$ existiert. Das *uniforme Wortproblem für* 1*–freie* CFGs ist das folgende Entscheidungsproblem:

EINGABE: Eine 1–freie CFG G mit dem Terminalalphabet Σ und ein Wort $s \in \Sigma^*$.

FRAGE: Gilt $s \in L(G)$?
Das folgende Resultat wurde in [Ruz80] bewiesen, siehe auch [GHR95], S. 176.

Lemma 4.1.1. Das uniforme Wortproblem für 1–freie CFGs befindet sich in AC^1.

In [BJW82] wurde gezeigt, daß die Frage, ob ein Paar $(s,t) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ bezüglich eines monadischen Semi–Thue Systems über Σ konfluent ist, auf das Wortproblem für eine 1–freie CFG reduziert werden kann. Im folgenden präsentieren wir die Konstruktion aus [BJW82] um den Leser zu überzeugen, daß sich die Konstruktion in AC^0 durchführen läßt. Sei $\mathcal{R}$ ein monadisches Semi–Thue System über dem Alphabet Σ. Seien $\Sigma_l = \{a_l \mid a \in \Sigma\}$ und $\Sigma_r = \{a_r \mid a \in \Sigma\}$ zwei disjunkte Kopien von Σ, und sei # ein zusätzliches Trennsymbol. Für ein Wort $s \in \Sigma^*$ sind die Wörter $s_l \in \Sigma_l^*$ und $s_r \in \Sigma_r^*$ auf die offensichtliche Weise definiert. Wir ordnen nun $\mathcal{R}$ die 1–freie CFG

$$G_{\mathcal{R}} = (\Sigma_l \cup \Sigma_r \cup \{S, S_l, S_r\}, \Sigma \cup \{\#\}, P, S)$$

zu, wobei P aus den folgenden Produktionen besteht[1], wobei $a \in \Sigma$ beliebig ist:

$S \Rightarrow a_l S a_r \mid S_l S \mid S S_r \mid \#$	$a_l \Rightarrow a,\ \ a_r \Rightarrow a$
$S_l \Rightarrow u_l,\ \ S_r \Rightarrow u_r^{rev}$ für $(u,1) \in \mathcal{R}$	$a_l \Rightarrow u_l,\ \ a_r \Rightarrow u_r^{rev}$ für $(u,a) \in \mathcal{R}$
$x \Rightarrow S_l x \mid x S_l$ für $x \in \Sigma_l \cup \{S_l\}$	$x \Rightarrow S_r x \mid x S_r$ für $x \in \Sigma_r \cup \{S_r\}$

Offensichtlich kann $G_{\mathcal{R}}$ aus $\mathcal{R}$ durch einen AC^0–Schaltkreis berechnet werden. Außerdem gilt $L(G_{\mathcal{R}}) = \{v\#w^{rev} \mid v \to_{\mathcal{R}}^* u \text{ und } w \to_{\mathcal{R}}^* u \text{ für ein } u \in \Sigma^*\}$. Der folgende Satz ist nun einfach zu beweisen.

Satz 4.1.2. $\mathrm{KOMO}(\Sigma^*)$ befindet sich in AC^1.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein monadisches Semi–Thue System über dem Alphabet Σ. In einem ersten Schritt berechnen wir mittels eines AC^0–Schaltkreises die Menge aller kritischen Paare von $\mathcal{R}$. Hierzu testen wir parallel für jedes Paar von Regeln $\ell_0 \to r_0$ und $\ell_1 \to r_1$ aus $\mathcal{R}$ und jede Faktorisierung $\ell_0 = st$ mit $t \neq 1$, ob ℓ_1 ein Präfix von t ist, oder ob t ein Präfix von ℓ_1 ist, was in konstanter Tiefe mittels Gattern von unbegrenzten Eingangsgrad getestet werden kann.

[1] Für ein Wort s bezeichne s^{rev} das Wort s rückwärts gelesen.

Ist dies der Fall, so erhalten wir offensichtlich ein kritisches Paar. In einem zweiten Schritt muß für jedes kritische Paar (v, w) getestet werden, ob (v, w) konfluent ist. Hierzu berechnen wir mittels eines AC^0–Schaltkreises aus der Eingabe $\mathcal{R}$ die 1–freie CFG $G_{\mathcal{R}}$ und überprüfen nach Lemma 4.1.1 in AC^1, ob $v\#w^{rev} \in L(G_{\mathcal{R}})$ gilt. □

Es sei noch erwähnt, daß aus den oben präsentierten Resultaten natürlich auch folgt, daß sich das uniforme Wortproblem für konfluente und monadische Semi–Thue Systeme in AC^1 befindet. Auch für dieses Problem erhalten wir also eine schärfere obere Schranke gegenüber dem längenreduzierenden Fall.

4.2 Monadische Vektorersetzungssysteme

Analog zu Semi–Thue Systemen reduziert sich auch für Vektorersetzungssysteme die Komplexität des Konfluenzproblems beim Übergang vom längenreduzierenden Fall zum monadischen Fall. Dies ist der Inhalt das folgenden Satzes.

Satz 4.2.1. KOMOV befindet sich in NP.

Beweis. Der Satz folgt leicht aus Resultaten aus [Huy83, Esp97], welche besagen, daß das Erreichbarkeitsproblem für *kommunikationsfreie Petri–Netze* in NP enthalten ist[2]. Unter Benutzung der Äquivalenz von Petri–Netzen und Vektorersetzungssystemen ist ein Vektorersetzungssystem $\mathcal{R}$ kommunikationsfrei, falls $|\ell| = 1$ für alle $\ell \in dom(\mathcal{R})$ gilt. Ist nun $\mathcal{R}$ ein monadisches Vektorersetzungssystem über Σ, so kann wie folgt in NP entschieden werden, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist: Zunächst werden alle polynomiell viele kritischen Paare von $\mathcal{R}$ nach Definition 3.2.1 konstruiert. Sei $(s, t) \in \Sigma^{\oplus} \times \Sigma^{\oplus}$ eines dieser kritischen Paare. Es ist zu überprüfen, ob das Paar (s, t) konfluent ist. Hierzu raten wir ein $u \in \Sigma^{\oplus}$ mit $|u| \leq |s|$ und $|u| \leq |t|$. Es genügt in NP zu überprüfen, ob $s \to_{\mathcal{R}}^{*} u$ und $t \to_{\mathcal{R}}^{*} u$ gilt. Um zu überprüfen, ob $s \to_{\mathcal{R}}^{*} u$ gilt, konstruieren wir das folgende Vektorersetzungssystem $\mathcal{P}$ über $\Sigma \cup \{\$\}$, wobei $\$ \notin \Sigma$ ein zusätzliches Symbol ist:

$$\mathcal{P} = \{r \to \ell \mid (\ell, r) \in \mathcal{R}, |r| = 1\} \cup \{\$ \to \ell \mid (\ell, 1) \in \mathcal{R}\}$$

[2]Dieses Problem ist sogar NP–vollständig [Huy83, Esp97].

Es ist zu beachten, daß $\mathcal{P}$ kommunikationsfrei ist. Dann gilt offensichtlich $s \to_{\mathcal{R}}^* u$ genau dann, wenn $u\$^i \to_{\mathcal{P}}^* s$ für ein $0 \leq i \leq |s| - |u|$ gilt. Es genügt somit eine Zahl i aus diesem Bereich zu raten, wobei zu beachten ist, daß $bit(i)$ polynomiell in $bit(s)$ beschränkt ist, und dann $u\$^i \to_{\mathcal{P}}^* s$ in NP zu verifizieren. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei offenen Fragen:

- Ist KOMOV NP–vollständig? Hierfür scheint zu sprechen, daß das Erreichbarkeitsproblem für kommunikationsfreie Petri–Netze NP–vollständig ist. Andererseits treten in den Konstruktionen aus [Huy83, Esp97] unerwünschte kritische Paare auf, und es scheint nicht klar zu sein, wie dieses Problem behoben werden kann.

- Wie lautet die Komplexität, wenn in Satz 4.2.1 die Dimension fixiert wird, d.h. was ist die Komplexität von KOMO($\mathbb{N}^k$) für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

Kapitel 5

Löschende Systeme

In diesem Kapitel betrachten wir löschende Spurersetzungssysteme, welche innerhalb dieser Arbeit die am stärksten eingeschränkte Klasse von Spurersetzungssystemen bilden. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Entscheidbarkeit des Konfluenzproblems für beliebige löschende Spurersetzungssysteme. Wir werden hierzu einen Algorithmus angeben, der für eine allgemeinere Klasse von Spurersetzungssystemen Konfluenz entscheidet. Ist außerdem das betrachtete SES kein Vektorersetzungssystem, so arbeitet dieser Algorithmus sogar in polynomieller Zeit. Der Fall eines löschenden Vektorersetzungssystems wird im folgenden Abschnitt separat betrachtet.

5.1 Löschende Vektorersetzungssysteme

Der folgende Satz ist einfach zu zeigen.

Satz 5.1.1. KOLÖV befindet sich in P.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein löschendes Vektorersetzungssystem über dem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Um zu überprüfen, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist, genügt es, für jedes kritische Paar (nach Definition 3.2.1) $(s,t) \in \Sigma^{\oplus} \times \Sigma^{\oplus}$ beliebige Normalformen von s und t zu berechnen und zu testen, ob diese Normalformen gleich sind. Es bleibt somit zu zeigen, daß eine Normalform eines kommutativen Wortes $s = a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m} \in \Sigma^{\oplus}$ bezüglich eines löschenden Vektorersetzungssystems $\mathcal{R}$ in P berechnet werden kann. Sei $dom(\mathcal{R}) = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$. Sei weiter $s_0 = s$, und für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei s_i eine Normalform von s_{i-1} bezüglich des einelementigen Vektorersetzungssystems $\{\ell_i \to 1\}$. Es ist dann einfach zu sehen, daß s_n eine Normalform von s bezüglich $\mathcal{R}$ ist. Es genügt somit zu zeigen, daß eine Normalform von $a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}$ bezüglich eines Systems der Form $\{a_1^{j_1} \cdots a_m^{j_m} \to 1\}$ in P berechnet werden kann. Dies ist jedoch recht einfach. Zunächst muß für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ der ganzzahlige Quotient $q_i = \lfloor k_i/j_i \rfloor$ berechnet werden, und das Minimum $q = min\{q_1, \ldots, q_m\}$ gebildet werden. Die gesuchte Normalform ist dann $a_1^{k_1 - q \cdot j_1} \cdots a_m^{k_m - q \cdot j_m}$. $\square$

Für den löschenden Fall ergeben sich ähnliche Fragen wie für den monadischen Fall:

- Ist KOLÖV P–vollständig?
- Wie lautet die Komplexität, wenn in Satz 5.1.1 die Dimension fixiert wird, d.h. was ist die Komplexität von KOLÖ($\mathbb{N}^k$) für ein festes $k \in \mathbb{N}$?

Es sollte noch erwähnt werden, daß auch für löschende Vektorersetzungssysteme das Erreichbarkeitsproblem NP–vollständig ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß das SUBSET SUM–Problem [GJ79], S. 223, NP–vollständig ist.

5.2 Löschende Spurersetzungssysteme

In [Die90b] wurde die Frage gestellt, ob Konfluenz für löschende Spurersetzungssysteme entscheidbar ist. In diesem Abschnitt beweisen wir, daß dies der Fall ist. In der Tat werden wir sogar für eine allgemeinere Klasse von Spurersetzungssystemen zeigen, daß Konfluenz entscheidbar ist.

Wir sagen, daß ein SES $\mathcal{R}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ die Bedingung (C) erfüllt, falls gilt:

(C1) Für alle $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$, alle Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{s} \neq 1$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:
Aus ($a \, I \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ oder $a \, I \, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$) folgt ($a\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0 a$ und $a\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1 a$).

(C2) Für alle $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und alle Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_i \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0,1\}$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$ gilt:
Es existieren Faktorisierungen $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1$ so, daß für alle $a \in \Sigma$ und alle $i \in \{0,1\}$ gilt:
Aus $a \, I \, \boldsymbol{p}_i$ folgt $a \, I \, \boldsymbol{s}_i$ und aus $a \, I \, \boldsymbol{q}_i$ folgt $a \, I \, \boldsymbol{t}_i$.

Es ist zu beachten, daß ein längenreduzierendes SES, welches die Bedingung (C) erfüllt, auch die Bedingung (A) erfüllt: Bedingung (A2) stimmt mit der Bedingung (C2) überein und die Bedingung (C1) impliziert (A1) wie folgt: Gilt $a\,I\,\boldsymbol{\ell}$ für eine Regel $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ mit $\boldsymbol{\ell} \neq 1$[1], so muß nur die Faktorisierung $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{q}_1 = 1$ und $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\ell} \neq 1$ betrachtet werden. Aus Bedingung (C1) folgt dann $a\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}a$. Offensichtlich erfüllt jedes löschende SES die Bedingung (C).

Satz 5.2.1. Das folgende Problem ist für jedes Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ entscheidbar:
EINGABE: Ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (C) erfüllt.
FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?
Gilt außerdem $I \neq (\Sigma \times \Sigma)\backslash Id_\Sigma$, so befindet sich dieses Problem sogar in P.

Es ist zu beachten, daß nach den Resultaten aus Abschnitt 3.3 Konfluenz für längenreduzierende Spurersetzungssysteme, welche die Bedingung (A) erfüllen, unentscheidbar ist.

Beweis. Sei (Σ, I) ein Unabhängigkeitsalphabet, und sei $\mathcal{R}$ ein längenreduzierendes SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (C) erfüllt. Sei NF ein Algorithmus, der für ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ und eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ eine beliebige Normalform $\mathrm{NF}(\boldsymbol{u}, \mathcal{R})$ von $\boldsymbol{u}$ bezüglich $\mathcal{R}$ berechnet. Sei KONF der Algorithmus in Abbildung 5.1.

Zuerst zeigen wir, daß $\mathcal{R}$ nicht konfluent ist, falls KONF „$\mathcal{R}$ nicht konfluent" ausgibt. Führt KONF die Zeile ($*$) aus, so existieren Regeln $\boldsymbol{\ell}_0 \to \boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 \to \boldsymbol{r}_1$ in $\mathcal{R}$ sowie Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{s} \neq 1$, $\boldsymbol{p}_0\,I\,\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0\,I\,\boldsymbol{q}_1$. Außerdem existieren Normalformen $\boldsymbol{u}_0$ von $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{u}_1$ von $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{u}_1$. Dann ist aber $\mathcal{R}$ in der Tat nicht konfluent, denn $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}_0$. Nehmen wir nun an, daß KONF die Zeile ($**$) ausführt. Dann gilt also $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$, aber es existiert ein $a \in \Sigma$ mit $a\,I\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ oder $a\,I\,\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$, und es existiert eine Normalform $\boldsymbol{v}_0$ von $a\boldsymbol{u}$ und eine Normalform $\boldsymbol{v}_1$ von $\boldsymbol{u}a$ mit $\boldsymbol{v}_0 \neq \boldsymbol{v}_1$. Gelte $a\,I\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$. Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (C1) erfüllt, folgt $a\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0a$ und $a\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1a$. Es folgt $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0a\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0a\boldsymbol{q}_1 = a\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}}^* a\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}_0$

[1] Da $\mathcal{R}$ längenreduzierend ist, muß $\boldsymbol{\ell} \neq 1$ gelten.

Input: Ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, welches die Bedingung (C) erfüllt.

```
begin
    forall ((ℓ0 → r0), (ℓ1 → r1)) ∈ R × R do
        forall p0, p1, q0, q1, s with
         ℓ0 = p0 s q0, ℓ1 = p1 s q1, s ≠ 1, p0 I p1, q0 I q1 do
            nf0 := NF(p0 r1 q0, R); nf1 := NF(p1 r0 q1, R);
            if nf0 ≠ nf1 then
                (∗) return „R nicht konfluent“
            else
                u := nf0(= nf1);
                forall a ∈ Σ with (a I p1 s q0) or (a I p0 s q1) do
                    nf0 := NF(au, R); nf1 := NF(ua, R);
                    if nf0 ≠ nf1 then
                        (∗∗) return „R nicht konfluent“
                endfor
        endfor
    endfor
    (∗∗∗) return „R konfluent“
end
```

Abbildung 5.1: Der Algorithmus KONF

und

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 a\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 a\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0 a\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_0 a\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0 a \to_{\mathcal{R}}^{*} \boldsymbol{u}a \to_{\mathcal{R}}^{*} \boldsymbol{v}_1.$$

Also ist $\mathcal{R}$ nicht konfluent. Der Fall $a\, I\, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ kann analog behandelt werden, indem die Spur $\boldsymbol{p}_1 a\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{q}_1$ anstatt der Spur $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 a\boldsymbol{q}_1$ betrachtet wird.

Nehmen wir nun an, daß KONF in Zeile $(***)$ „$\mathcal{R}$ konfluent“ ausgibt. Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Durch eine Induktion über die Länge von Spuren genügt es, die folgende Implikation für alle $\boldsymbol{t} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ zu zeigen:

Ist $\mathcal{R}$ konfluent auf allen Spuren $\boldsymbol{t}'$ mit $|\boldsymbol{t}'| < |\boldsymbol{t}|$, so ist $\mathcal{R}$ konfluent auf $\boldsymbol{t}$.

Sei also $\boldsymbol{t} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$, und sei $\mathcal{R}$ konfluent auf allen kürzeren Spuren. Wir müssen zeigen, daß alle Paare $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1)$ mit $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}}^{i} \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}}^{j} \boldsymbol{t}_1$ für beliebige

$i, j \geq 0$ konfluent sind. Der Fall $i = 0$ oder $j = 0$ ist trivial. Nehmen wir für einen Moment an, daß alle Fälle mit $i = 1 = j$ schon behandelt wurden. Wir können dann die Argumente aus dem Standardbeweis von Newmans Lemma benutzen: Aus $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{s}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{t} \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{s}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{t}_1$ folgt, daß ein $\boldsymbol{s}$ mit $\boldsymbol{s}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{s}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{s}$ existiert. Wegen $|\boldsymbol{s}_0| < |\boldsymbol{t}|$, $\boldsymbol{s}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{s}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{s}$ existiert eine Spur $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{t}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$. Aus $|\boldsymbol{s}_1| < |\boldsymbol{t}|$, $\boldsymbol{s}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{t}_1$ und $\boldsymbol{s}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{s} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$ folgt schließlich $\boldsymbol{t}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$, d.h. $\boldsymbol{t}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ für eine Spur $\boldsymbol{v}$.

Es genügt somit für alle Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und alle Faktorisierungen $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{v}_1$ zu zeigen, daß das Paar $(\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1)$ konfluent ist. Lemma 2.2.2 angewandt auf die Identität $\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{v}_1$ liefert neun Spuren $\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{q}_i$, $\boldsymbol{w}_i$, $\boldsymbol{y}_i$ $(i \in \{0, 1\})$ und $\boldsymbol{s}$ mit

- $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0, \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{y}_1, \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{y}_1,$
- $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{w}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1\, I\, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{y}_1,$

siehe auch die folgende Graphik:

$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{w}_1$	$\boldsymbol{q}_0$	$\boldsymbol{y}_1$
$\boldsymbol{\ell}_1$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{q}_1$
$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{y}_0$	$\boldsymbol{p}_0$	$\boldsymbol{w}_0$
	$\boldsymbol{u}_0$	$\boldsymbol{\ell}_0$	$\boldsymbol{v}_0$

Es ist zu zeigen, daß das Paar $(\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{y}_1)$ konfluent ist. Angenommen es gilt $\boldsymbol{y}_0 \neq 1$ oder $\boldsymbol{y}_1 \neq 1$. Für die Spur $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1$ gilt dann $|\boldsymbol{t}'| < |\boldsymbol{t}|$ und

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{t}' = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1.$$

Also ist das Paar $(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1)$ konfluent. Dies gilt dann aber auch für das Paar $(\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{y}_1)$. Wir können also $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_1 = 1$ annehmen und das Paar

$$(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1)$$

betrachten. Gilt $\boldsymbol{s} = 1$, d.h. $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1$, so ist dieses Paar wegen Lemma 2.4.2 konfluent[2]. Gelte also $\boldsymbol{s} \neq 1$. Dann haben wir eine der Situationen vorliegen, die in den zwei äußersten **forall**–Schleifen von KONF betrachtet werden. Da wir annehmen, daß KONF „$\mathcal{R}$ konfluent" ausgibt, existiert eine Spur $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}$. Aus Bedingung (C1) sowie $\boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ folgt außerdem $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{w}_j\boldsymbol{r}_i$ für $i, j \in \{0, 1\}$. Es ergibt sich somit $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_0$ und $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1$. Es genügt also zu zeigen, daß das Paar $(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1)$ konfluent ist. Der Fall $\boldsymbol{w}_0 = 1 = \boldsymbol{w}_1$ ist trivial. Gelte also o.B.d.A. $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}a$ für ein $a \in \Sigma$. Wegen $\boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ gilt auch $a \, I \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$. Also ist $a \in \Sigma$ eines der Symbole, die in der innersten **forall**–Schleife von KONF betrachtet werden. Also muß eine Spur $\boldsymbol{v}$ mit $a\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}a \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v}$ existieren. Es folgt

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}a\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}a\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_1. \tag{5.1}$$

Betrachten wir die Spur $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0$. Die Spur $\boldsymbol{t}'$ entsteht aus $\boldsymbol{t}$ durch ersetzen des Faktors $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}a$ durch $\boldsymbol{w}$. Es gilt $|\boldsymbol{t}'| < |\boldsymbol{t}|$, und da $\boldsymbol{w}$ als Faktor von $\boldsymbol{w}_0$ mindestens die gleichen Unabhängigkeiten wie $\boldsymbol{w}_0$ erfüllt, gilt $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1$ sowie $\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}$ (wegen Bedingung (C1) und $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{w}$). Also gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &\to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} \quad \text{und} \\ \boldsymbol{t}' &\to_{\mathcal{R}} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1. \end{aligned}$$

Es folgt $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}$ für eine Spur $\boldsymbol{x}$. Also gilt

$$\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}a \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}a \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}a\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1 a \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}a. \tag{5.2}$$

Aus $\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}a\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_1$ (siehe (5.1)), $\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}a\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}a$ (siehe (5.2)) und $|\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}a\boldsymbol{w}_1| = |\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1| \leq |\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{w}_1| < |\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0| = |\boldsymbol{t}|$ (wobei die strikte Ungleichung aus $|\boldsymbol{r}_1| < |\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1| = |\boldsymbol{\ell}_1|$ folgt), ergibt sich schließlich $\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{x}a \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{z}$ für eine Spur $\boldsymbol{z}$. Wir erhalten somit $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{z}$ aus (5.1) sowie $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_0 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{x}a \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{z}$ aus (5.2). Also ist das Paar $(\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}_0)$ konfluent. Die Korrektheit von KONF ist somit bewiesen.

Sei nun $I \neq (\Sigma \times \Sigma) \setminus Id_\Sigma$. Wir behaupten, daß der Algorithmus KONF dann sogar in Polynomialzeit arbeitet. Dies folgt aus zwei Tatsachen:

[2]Es ist zu beachten, daß $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) erfüllt.

- Für ein festes Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I) ist die Anzahl der unterschiedlichen Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{psq}$ einer Spur $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ durch ein Polynom in $|\boldsymbol{\ell}|$ beschränkt. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Anzahl der Präfixe einer Spur $\boldsymbol{\ell}$ durch ein Polynom in $|\boldsymbol{\ell}|$ beschränkt ist [BMS89].

- Eine Normalform einer Spur $\boldsymbol{t}$ bezüglich eines längenreduzierenden SES $\mathcal{R}$, welches kein Vektorersetzungssystem ist, kann in Zeit, die polynomiell mit $|\boldsymbol{t}|$ und $\|\mathcal{R}\|$ wächst, berechnet werden. Das Problem der Normalformberechnung für längenreduzierende Spurersetzungssysteme wird in [Die90a, Die90c, BD95, Ber95, BD96] behandelt[3].

$\square$

Aus Satz 5.1.1 und Satz 5.2.1 ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 5.2.2. KOLÖ(M) befindet sich in P für jedes Spurmonoid M.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem einfachen Problem, welches für monadische Semi–Thue Systeme entscheidbar ist, jedoch schon für löschende Spurersetzungssysteme, die nur eine Regel enthalten, im allgemeinen unentscheidbar ist. Für ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ und eine Menge $L \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ sei $\Delta^*_{\mathcal{R}}(L) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \exists \boldsymbol{u} \in L : \boldsymbol{u} \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}\}$ die Menge aller *Nachfolger* von L bezüglich $\mathcal{R}$. Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine erkennbare Wortsprache und $\mathcal{R}$ ein monadisches Semi–Thue System über Σ, so ist auch die Menge $\Delta^*_{\mathcal{R}}(L)$ erkennbar [BO85]. Jedoch bereits für löschende Spurersetzungssysteme, die nur eine Regel enthalten, ist dies falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.2.3. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $I = \{(a, c), (c, a)\}$. Die Spur $\boldsymbol{u} = [abc]_I$ ist offensichtlich zusammenhängend. Nach Ochmańskis Theorem ist die Sprache $L = \{\boldsymbol{u}\}^*$ erkennbar. Sei $\mathcal{R}$ das löschende SES $\{b \rightarrow 1\}$. Angenommen $\Delta^*_{\mathcal{R}}(L)$ ist erkennbar. Dann ist aber auch $\{\boldsymbol{v} \mid alph(\boldsymbol{v}) \subseteq \{a, c\}\} \cap \Delta^*_{\mathcal{R}}(L) = \{[a^n c^n]_I \mid n \geq 0\}$ erkennbar, was nicht der Fall ist, siehe z.B. [DR95], S. 172.

Für eine Menge $\mathcal{C}$ von Spurersetzungssystemen über einem festen Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ definieren wir das *erweiterte Wortproblem* für $\mathcal{C}$ als das folgende Entscheidungsproblem [BO85]:

[3] Die dort betrachteten Algorithmen sind alle nicht–uniform, d.h. das SES bezüglich dem reduziert wird, ist nicht Teil der Eingabe. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß diese Algorithmen auch im uniformen Fall, wo also das SES mit Teil der Eingabe ist, immer noch in polynomieller Zeit arbeiten.

EINGABE: Ein SES $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ und zwei erkennbare Spursprachen $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$.
FRAGE: Existieren $\boldsymbol{u}_1 \in L_1$ und $\boldsymbol{u}_2 \in L_2$ mit $\boldsymbol{u}_1 \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}_2$?

Eine einfache Konsequenz des oben erwähnten Abschlusses von erkennbaren Wortsprachen unter dem Operator $\Delta^*_{\mathcal{R}}$, falls $\mathcal{R}$ ein monadisches Semi–Thue System ist, ist die Entscheidbarkeit des erweiterten Wortproblems für monadische und konfluente Semi–Thue Systeme [BO85]. Für allgemeine Spurersetzungssysteme gilt jedoch das folgende negative Resultat:

Satz 5.2.4. Es existieren ein Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, ein $a \in \Sigma$ und ein $L_1 \subseteq \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ so, daß für das löschende und konfluente SES $\mathcal{R} = \{a \to 1\}$ das folgende Problem unentscheidbar ist:
EINGABE: Ein $L_2 \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$.
FRAGE: Existieren $\boldsymbol{u}_1 \in L_1$ und $\boldsymbol{u}_2 \in L_2$ mit $\boldsymbol{u}_1 \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}_2$?

Beweis. Bekanntlich ist das Postsche Korrespondenzproblem, kurz PCP, unentscheidbar über einem zweielementigen Alphabet. Dabei kann zusätzlich verlangt werden, daß eine Lösung des PCP mit einem ausgezeichneten Paar beginnt, d.h. das folgende Problem, welches als *modifiziertes PCP über* $\{a, b\}$ bezeichnet wird, ist unentscheidbar, siehe z.B. [HU70]:
EINGABE: Eine Menge $\{(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)\}$ von Paaren mit $s_i, t_i \in \{a, b\}^*$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.
FRAGE: Existiert eine Folge $i_1 i_2 \cdots i_k \in \{1, \ldots, n\}^*$ mit $s_1 s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} = t_1 t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k}$?

Sei also $P = \{(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)\}$ eine Instanz des modifizierten PCPs über $\{a, b\}$. Sei $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ eine Kopie von $\{a, b\}$, und sei # ein zusätzliches Symbol. Für ein Wort $s \in \{a, b\}^*$ ist das Wort $\overline{s}$ auf die offensichtliche Weise definiert. Sei $\Sigma = \{a, b, \overline{a}, \overline{b}, \#\}$. Auf dem Alphabet Σ definieren wir die Unabhängigkeitsrelation I durch den folgenden Graphen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & a \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ \overline{a} \arrow[dr, dash] & & \overline{b} \arrow[dl, dash] & \# \\ & b & & \end{tikzcd}$$

Die Symbole in $\{a, b\}$ und $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ sind also paarweise unabhängig, während # von allen Symbolen abhängig ist. Sei

$$L_1 = \{[a\#\overline{a}]_I, [b\#\overline{b}]_I\}^* \qquad \text{und} \qquad L_2 = \{[s_1\overline{t}_1]_I\}\, \{[s_i\#\overline{t}_i]_I \mid 1 \leq i \leq n\}^*.$$

Aus Ochmańskis Theorem folgt, daß $L_1, L_2 \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ gilt. Sei $\mathcal{R} = \{\# \to 1\}$. Das SES $\mathcal{R}$ ist also löschend und konfluent. Das modifizierte PCP P hat nun offensichtlich genau dann eine Lösung, wenn

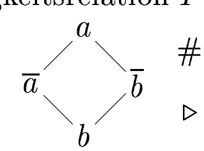
$$\begin{aligned}
&\exists \boldsymbol{u}_1 \in L_1, \boldsymbol{u}_2 \in L_2, \boldsymbol{v} \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R}) : \boldsymbol{u}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}_2 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v} \quad \text{genau dann, wenn}\\
&\exists \boldsymbol{u}_1 \in L_1, \boldsymbol{u}_2 \in L_2, \boldsymbol{v} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) : \boldsymbol{u}_1 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}_2 \to_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{v} \quad \text{genau dann, wenn}\\
&\exists \boldsymbol{u}_1 \in L_1, \boldsymbol{u}_2 \in L_2 : \boldsymbol{u}_1 \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^* \boldsymbol{u}_2
\end{aligned}$$

gilt, wobei die letzte Äquivalenz aus der Konfluenz von $\mathcal{R}$ folgt. □

Es könnte eine interessantes Problem sein, diejenigen Spurmonoide zu charakterisieren, für die das erweiterte Wortproblem entscheidbar für löschende bzw. monadische Spurersetzungssysteme ist. Für monadische Spurersetzungssysteme läßt sich Satz 5.2.4 folgendermaßen verschärfen:

Satz 5.2.5. Es existieren ein Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, ein monadisches und konfluentes SES $\mathcal{R}$ und ein $a \in \Sigma \cap \mathrm{IRR}(\mathcal{R})$ so, daß das folgende Problem unentscheidbar ist:
EINGABE: Ein $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$.
FRAGE: Existiert ein $\boldsymbol{u} \in L$ mit $\boldsymbol{u} \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^* a$ (was gleichbedeutend mit $\boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* a$ ist)?

Beweis. Sei $P = \{(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)\}$ wieder eine Instanz des modifizierten PCPs über $\{a, b\}$. Sei $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ eine Kopie von $\{a, b\}$ und seien $\rhd$ und $\#$ zwei zusätzliche Symbole. Für ein Wort $s \in \{a, b\}^*$ ist das Wort $\overline{s}$ auf die offensichtliche Weise definiert. Sei $\Sigma = \{a, b, \overline{a}, \overline{b}, \#, \rhd\}$. Auf dem Alphabet Σ definieren wir die Unabhängigkeitsrelation I durch den folgenden Graphen:



Sei $L = \{[\rhd s_1 \overline{t}_1]_I\}\,\{[s_i \# \overline{t}_i]_I \mid 1 \le i \le n\}^*$. Aus Ochmańskis Theorem folgt, daß $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ gilt. Sei $\mathcal{R}$ das monadische SES

$$\mathcal{R} = \{\# \to 1\} \cup \{[\rhd a\overline{a}]_I \to \rhd,\ [\rhd b\overline{b}]_I \to \rhd\}.$$

Da $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) erfüllt und keine nicht–trivialen kritischen Paare besitzt, ist $\mathcal{R}$ konfluent. Das modifizierte PCP P hat nun offensichtlich genau dann eine Lösung, wenn $\exists \boldsymbol{u} \in L : \boldsymbol{u} \to_{\mathcal{R}}^* \rhd$ gilt, was äquivalent zu $\exists \boldsymbol{u} \in L : \boldsymbol{u} \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^* \rhd$ ist. □

Kapitel 6

(α, β)–Konfluenz

In diesem Kapitel untersuchen wir (α, β)–Konfluenz für Spurersetzungssysteme. Nach einigen motivierenden Vorbemerkungen werden wir das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen, welches besagt, daß (α, β)–Konfluenz für beliebige Spurersetzungssysteme entscheidbar ist. Dieses Resultat wird sich als Spezialfall eines Resultats über die Entscheidbarkeit eines Fragments der logischen Theorie 1. Ordnung der Einschrittersetzungsrelation $\to_{\mathcal{R}}$ (wobei $\mathcal{R}$ ein SES ist) ergeben. Daran anschließend präsentieren wir einige Anwendungen der Entscheidbarkeit der (α, β)–Konfluenz auf das (gewöhnliche) Konfluenzproblem für Spurersetzungssysteme. Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen zur logischen Theorie 1. Ordnung der Einschrittersetzungsrelation $\to_{\mathcal{R}}$.

6.1 Vorbemerkungen

Auch bezüglich der (α, β)–Konfluenz zeigen sich gewisse Unterschiede in Abhängigkeit von dem zugrundeliegenden Spurmonoid, wie die folgende Bemerkung zeigt. Ein Semi–Thue System $\mathcal{R}$ ist offensichtlich genau dann lokal konfluent, wenn ein $\beta > 0$ existiert so, daß $\mathcal{R}$ β–konfluent ist. Die eine Richtung dieser Bemerkung ist trivial, da β–Konfluenz natürlich lokale Konfluenz impliziert. Ist andererseits $\mathcal{R}$ lokal konfluent, so sind alle endlich vielen kritischen Paare konfluent. Wählt man nun ein $\beta > 0$ so, daß alle kritischen Paare von $\mathcal{R}$ β–konfluent sind, so folgt aus Lemma 2.4.4 die β–Konfluenz von $\mathcal{R}$[1].

[1] Um Lemma 2.4.4 anwenden zu können, muß zwar $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) erfüllen, d.h. keine Regeln der Form $1 \to r \neq 1$ enthalten, jedoch kann diese Einschränkung umgangen

Das folgende Beispiel zeigt, daß dieser einfache Sachverhalt für Spurersetzungssysteme nicht mehr gilt.

Beispiel 6.1.1. Wir betrachten das SES $\mathcal{R} = \{ba \to 1, ab \to 1, c \to 1\}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\{a, b, c\}, \{(a, c), (c, a)\})$. In Beispiel 2.4.5 wurde gezeigt, daß $\mathcal{R}$ lokal konfluent ist. Nun gilt für jedes $n \geq 0$: $[bac^n b]_I \to_{\mathcal{R}} [c^n b]_I$ und $[bac^n b]_I = [bc^n ab]_I \to_{\mathcal{R}} [bc^n]_I$. Es gilt zwar $[c^n b]_I \to^n_{\mathcal{R}} b$ und $[bc^n]_I \to^n_{\mathcal{R}} b$, aber das Paar $([c^n b]_I, [bc^n]_I)$ ist offensichtlich nicht $(n-1)$–konfluent. Also existiert kein $\beta > 0$ so, daß $\mathcal{R}$ β–konfluent ist.

Da lokale Konfluenz für Semi–Thue Systeme unentscheidbar ist [BO84], ist es nach den obigen Bemerkungen unentscheidbar, ob für ein SES $\mathcal{R}$ ein $\beta > 0$ existiert so, daß $\mathcal{R}$ β–konfluent ist. Andererseits gilt jedoch der folgende Satz, welcher das Hauptresultat dieses Kapitels ist.

Satz 6.1.2. $\mathrm{KO}_{\alpha,\beta}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ ist entscheidbar für alle $\alpha, \beta > 0$ und jedes Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I).

Dieses Resultat ist aus mehreren Gründen interessant. In Abschnitt 6.3 werden wir mittels Satz 6.1.2 mehrere Kriterien für Spurersetzungssysteme herleiten, welche die Entscheidbarkeit der Konfluenz implizieren. Außerdem liefert Satz 6.1.2 in Verbindung mit Lemma 1.2.2 eine Möglichkeit zu beweisen, daß ein gegebenes SES $\mathcal{R}$ konfluent ist, denn nach Lemma 1.2.2 genügt es hierfür zu zeigen, daß $\mathcal{R}$ (α, α)–konfluent für ein $\alpha > 0$ ist, was für ein festes α entscheidbar ist. Dieses Verfahren ist nicht auf terminierende Spurersetzungssysteme beschränkt.

Beispiel 6.1.3. Sei $\mathcal{R}$ das nicht–terminierende SES $\mathcal{R} = \{aa \to 1, aa \to a, 1 \to aa\}$ über dem freien (und frei kommutativen) Monoid $\{a\}^* \simeq \mathbb{N}$. Ein Wort a^n bezeichnen wir im weiteren kurz mit n, d.h. $\mathcal{R} = \{2 \to 0, 2 \to 1, 0 \to 2\}$. Die drei Regeln in $\mathcal{R}$ bezeichnen wir mit -2, -1 und $+2$. Es gilt also z.B. $n \to_{-1} m$ genau dann, wenn $m = n - 1$ und $n \geq 2$ gilt. Das SES $\mathcal{R}$ ist nicht $(1, 1)$–konfluent, denn es gilt z.B. $2 \to_{-2} 0$ und $2 \to_{-1} 1$, aber von 0 und 1 können wir in einem Ableitungsschritt nur 2 bzw. 3 erreichen.

Andererseits ist jedoch $\mathcal{R}$ $(2, 2)$–konfluent und somit auch konfluent. Im folgenden bezeichnen wir die Relation $\to_{\mathcal{R}}$ mit $\to$. Um zu zeigen, daß $\mathcal{R}$ $(2, 2)$–konfluent ist, müssen alle Situationen der Form $k \to^i m$, $k \to^j n$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ betrachtet werden.

---

werden, indem der Begriff des kritischen Paares für Semi–Thue Systeme anders definiert wird.

Da $k \rightarrow^i m$, $k \rightarrow^j n$ auch $k + l \rightarrow^i m + l$, $k + l \rightarrow^j n + l$ für jedes $l \geq 0$ impliziert, müssen nur endlich viele Situationen betrachtet werden. Genauer muß für jede Wahl von $i, j \in \{1, 2\}$ und $c_1, \ldots, c_i, d_1, \ldots, d_j \in \mathcal{R}$ nur eine Situation der Form $k \rightarrow_{c_1} \cdots \rightarrow_{c_i} m$, $k \rightarrow_{d_1} \cdots \rightarrow_{d_j} n$ betrachtet werden. Glücklicherweise kann die Anzahl der zu betrachtenden Situationen beträchtlich verringert werden. Zuerst kann o.B.d.A. $c_1, \ldots, c_i, d_1, \ldots, d_j \neq +2$ angenommen werden. Andernfalls kann nämlich o.B.d.A. $c_1 = +2$ angenommen werden, da Anwendungen der Regel $+2$ stets an den Anfang einer Ableitungskette geschoben werden können. Gilt $i = 1$, so folgt $m = k + 2 > k$ und somit $m = k + 2 \rightarrow_{d_1} \cdots \rightarrow_{d_j} n + 2$ und $n \rightarrow_{+2} n + 2$. Gilt $i = 2$, d.h. $m = k + 2 + c_2 \geq k$ (da $c_2 \geq -2$), so gilt $m = k + 2 + c_2 \rightarrow_{d_1} \cdots \rightarrow_{d_j} k + 2 + c_2 + d_1 + \cdots + d_j = n + 2 + c_2$ und $n \rightarrow_{+2} \rightarrow_{c_2} n + 2 + c_2$. Gelte also im weiteren $c_1, \ldots, c_i, d_1, \ldots, d_j \neq +2$. Natürlich kann auch der Fall $c_1 = d_1$ ausgeschlossen werden. Schließlich impliziert $k \rightarrow_{-2} k - 2 \rightarrow_{-1} k - 3$, daß $k \geq 4$ gilt, und somit auch $k \rightarrow_{-1} k - 1 \rightarrow_{-2} k - 3$ gilt. Anwendungen der Regel -1 können somit an den Anfang der betrachteten Ableitungsketten geschoben werden. Da wir $c_1 \neq d_1$ voraussetzen, kann auch der Fall, daß Regel -1 sowohl in $c_1, \ldots, c_i$ als auch in $d_1, \ldots, d_j$ auftaucht, ausgeschlossen werden. Es müssen somit noch die folgenden Fälle betrachtet werden.

- $4 \rightarrow_{-2} \rightarrow_{-2} 0$ und $4 \rightarrow_{-1} \rightarrow_{-2} 1$: Es gilt $0 \rightarrow_{+2} 2 \rightarrow_{-1} 1$.
- $4 \rightarrow_{-2} \rightarrow_{-2} 0$ und $4 \rightarrow_{-1} \rightarrow_{-1} 2$: Es gilt $0 \rightarrow_{+2} 2$.
- $4 \rightarrow_{-2} \rightarrow_{-2} 0$ und $4 \rightarrow_{-1} 3$: Es gilt $0 \rightarrow_{+2} 2$ und $3 \rightarrow_{-1} 2$.
- $3 \rightarrow_{-2} 1$ und $3 \rightarrow_{-1} \rightarrow_{-2} 0$: Es gilt $0 \rightarrow_{+2} 2 \rightarrow_{-1} 1$.
- $3 \rightarrow_{-2} 1$ und $3 \rightarrow_{-1} \rightarrow_{-1} 1$: trivial
- $2 \rightarrow_{-2} 0$ und $2 \rightarrow_{-1} 1$: Es gilt $0 \rightarrow_{+2} 2 \rightarrow_{-1} 1$.

Als eine offenes Problem sei die Frage genannt, ob für jedes $\alpha > 0$ ein SES über $\mathbb{N}$ (oder einem anderen Spurmonoid) existiert, welches $(\alpha + 1, \alpha + 1)$–konfluent aber nicht (α, α)–konfluent ist.

Schließlich vermittelt Satz 6.1.2 eine genauere Kenntnis der Grenzlinie zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit für das Konfluenzproblem für Spurersetzungssysteme. Dies kann man wie folgt sehen. In Abschnitt 3.3 wurde bewiesen, das KOLR($\mathbb{M}(\Sigma, I)$) außer für die beiden trivialen Fälle

$I = \emptyset$ und $I = (\Sigma \times \Sigma)\backslash Id_\Sigma$ unentscheidbar ist. Nun gilt für ein längenreduzierendes SES $\mathcal{R}$ offensichtlich folgendes: Gilt $\boldsymbol{u} \to_\mathcal{R} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to_\mathcal{R} \boldsymbol{w}$, so ist das Paar $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ genau dann konfluent, wenn das Paar $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ $|\boldsymbol{u}|$–konfluent ist. Dies gilt, da $|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}| \leq |\boldsymbol{u}|$ gilt, und somit alle von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ ausgehenden Ableitungsketten aus maximal $|\boldsymbol{u}|$ vielen Ersetzungsschritten bestehen. Sei nun $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monotone Funktion auf den natürlichen Zahlen. Für den Moment wollen wir ein SES $\mathcal{R}$ f–konfluent nennen, falls aus $\boldsymbol{u} \to_\mathcal{R} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} \to_\mathcal{R} \boldsymbol{w}$ folgt, daß das Paar $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ $f(|\boldsymbol{u}|)$–konfluent ist. Ein längenreduzierendes SES ist somit genau dann lokal konfluent (und somit konfluent), wenn es $id_\mathbb{N}$–konfluent ist, wobei $id_\mathbb{N}$ die Identitätsfunktion auf $\mathbb{N}$ ist. Nach Satz 3.3.11 ist somit $id_\mathbb{N}$–Konfluenz unentscheidbar für Spurersetzungssysteme über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, falls $I \neq \emptyset$ und $I \neq (\Sigma \times \Sigma)\backslash Id_\Sigma$ gilt[2]. Auf der anderen Seite impliziert jedoch Theorem 6.1.2, daß f–Konfluenz für eine konstante Funktion f für jedes Spurmonoid entscheidbar ist. Diese Betrachtung motiviert die Untersuchung der f–Konfluenz für eine z.B. logarithmisch wachsende Funktion. Bisher konnten jedoch diesbezüglich keine Resultate erzielt werden.

6.2 Beweis von Satz 6.1.2

In diesem Abschnitt werden wir Satz 6.1.2 beweisen. Wir werden diesen Satz als ein Korollar eines allgemeineren Resultats über die Entscheidbarkeit eines Fragments der logischen Theorie 1. Ordnung der Einschrittersetzungsrelation $\to_\mathcal{R}$ eines SES $\mathcal{R}$ herleiten. Offensichtlich läßt sich die Aussage, daß ein SES $\mathcal{R}$ (α, β)–konfluent ist, durch eine Formel in der Logik 1. Stufe ausdrücken, deren atomare Teilformeln alle von der Gestalt $x \to_\mathcal{R} y$ für Variablen x und y sind. In diesem Abschnitt werden wir für eine Teilklasse von Formeln, die mächtig genug ist, um die (α, β)–Konfluenz eines Spurersetzungssystems $\mathcal{R}$ auszudrücken, zeigen, daß die Gültigkeit in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ einer Formel aus dieser Teilklasse entscheidbar ist. Zu diesem Zweck werden wir Formeln aus dieser Teilklasse über eine Reihe von Transformationsschritten auf Formeln reduzieren, deren atomare Teilformeln von der Form $x \in L$ sind, wobei x eine Variable ist, und L eine erkennbare Spursprache ist. Aufgrund der effektiven Abschlußeigenschaften und Entscheidbarkeitseigenschaften von erkennbaren Spursprachen, die wir in Abschnitt 2.3 aufgeli-

[2]Für die beiden trivialen Fälle $I = \emptyset$ und $I = (\Sigma \times \Sigma)\backslash Id_\Sigma$ kann f–Konfluenz für jedes monotone f durch Betrachtung aller kritischen Paare entschieden werden.

stet haben, wird es sich als entscheidbar erweisen, ob eine solche Formel in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gültig ist. Als Zwischenprodukte dieser Transformationsschritte werden sich auch Formeln ergeben, die als atomare Teilformeln Spurgleichungen [Dub86b, Mat97, DMM97, Die97] enthalten.

Im folgenden werden wir eine Reihe von Notationen einführen. Sei *Var* eine abzählbar unendliche Menge von *Variablen.* Zur Bezeichnung von Variablen verwenden wir die eventuell indizierten Buchstaben x, y und z. Für den Rest dieses Kapitels fixieren wir auch ein Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I), wobei o.B.d.A. $\mathit{Var} \cap \Sigma = \emptyset$ gelte. Die Menge aller *Muster* sei $(\mathit{Var} \cup \Sigma)^*$. Zur Bezeichnung von Mustern verwenden wir die eventuell indizierten Buchstaben S, T, U, V und W. Die Menge aller Variablen, die in einem Muster S vorkommen, wird mit $\mathit{Var}(S)$ bezeichnet. Ein Muster S heißt *linear* falls jede Variable höchstens einmal in S vorkommt. Im weiteren gehen wir implizit davon aus, daß alle betrachteten Muster linear sind. Ein lineares Muster S mit $\mathit{Var}(S) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichnen wir auch mit $S(x_1, \ldots, x_n)$. Dies soll jedoch nicht notwendigerweise bedeuten, daß die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ auch in dieser Reihenfolge in S vorkommen. Lineare Muster aus Var^* bezeichnen wir auch als *Typen.* Ein Typ ist also eine wiederholungsfreie Liste von Variablen. Typen bezeichnen wir mit den eventuell indizierten Buchstaben $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ und $\mathcal{U}$. Für ein Muster S bezeichnen wir mit $\mathit{typ}(S) = \pi_{\mathit{Var}}(S)$ die Projektion von S auf die Menge aller Variablen. Insbesondere ist $\mathit{typ}(S)$ ein Typ.

Wir betrachten im weiteren Formeln in der Logik 1.Stufe, die aus atomaren Teilformeln der folgenden Form aufgebaut sind:

- $S = T$, wobei S und T lineare Muster sind.
- $x \in L$, wobei $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ und $x \in \mathit{Var}$ gilt.
- $\pi_\Gamma(x) = y$, wobei $\Gamma \subseteq \Sigma$ und $x, y \in \mathit{Var}$ gilt.

Für $\Gamma \subseteq \Sigma$ ist die Menge $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \Gamma\}$ nach Lemma 2.3.1(4) erkennbar. In diesem Fall schreiben wir $\mathit{alph}(x) \subseteq \Gamma$ anstatt $x \in \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \Gamma\}$. Ist $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, so verwenden wir die Formel $x \to_{\mathcal{R}} y$, wobei $x, y \in \mathit{Var}$ gilt, als eine Abkürzung für die Formel

$$\exists z_1, z_2 : \bigvee_{([\ell]_I, [r]_I) \in \mathcal{R}} (x = z_1 \ell z_2 \ \wedge \ y = z_1 r z_2).$$

Eine Formel φ, die genau die freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält, bezeichnen wir auch mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Eine endliche Disjunktion, wobei die genaue Anzahl der disjunktiven Teilformeln nicht wichtig ist, bezeichnen wir auch mit

$\bigvee\limits_{\alpha}\varphi_\alpha$. Der Parameter α soll dabei über eine endliche Menge variieren. Einen Quantorenpräfix der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_m$ kürzen wir auch mit $\exists x_i (1 \leq i \leq m)$ ab. Eine *Substitution* ist eine Funktion $\vartheta : \mathit{Var} \longrightarrow (\mathit{Var} \cup \Sigma)^*$. Die homomorphe Erweiterung von ϑ auf die Menge $(\mathit{Var} \cup \Sigma)^*$ bezeichnen wir ebenfalls mit ϑ. Ist $S(x_1, \ldots, x_m)$ ein lineares Muster so, daß auch $\vartheta(S)$ linear ist, so schreiben wir auch $\vartheta(S) = S(\vartheta(x_1)/x_1, \ldots, \vartheta(x_m)/x_m) = S(\ldots \vartheta(x_i)/x_i \ldots)$. Eine Substitution ϑ ist eine *Grundsubstitution*, falls $\vartheta(x) \in \Sigma^*$ für jede Variable $x \in Var$ gilt.

Die Interpretation solcher Formeln in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ist offensichtlich. Für eine Grundsubstitution ϑ schreiben wir $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models \varphi$, falls die Formel φ wahr in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ wird, wenn jede freie Variable x von φ mit dem Wort $\vartheta(x)$ belegt wird. Für atomare Formeln gilt also

- $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models (S = T)$ falls $\vartheta(S) \equiv_I \vartheta(T)$,
- $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models (x \in L)$ falls $[\vartheta(x)]_I \in L$ sowie
- $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models (\pi_\Gamma(x) = y)$ falls $\pi_\Gamma(\vartheta(x)) \equiv_I \vartheta(y)$.

Natürlich hängt $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models \varphi$ nur von den Werten von ϑ auf den freien Variablen von φ ab. Ist φ ein Satz, d.h. enthält φ keine freien Variablen, so schreiben wir kurz $\mathbb{M}(\Sigma, I) \models \varphi$ und sagen, daß φ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gültig ist. Zwei Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ und $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ heißen äquivalent in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, falls für jede Grundsubstitution ϑ gilt: $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models \varphi$ genau dann, wenn $(\mathbb{M}(\Sigma, I), \vartheta) \models \phi$.

Schließlich definieren wir für eine endliche Menge $X \subseteq \mathit{Var}$ von Variablen und eine Funktion $\sigma : X \longrightarrow 2^\Sigma$ ein Unabhängigkeitsalphabet $(X, I(\sigma))$ durch $I(\sigma) = \{(x, y) \mid \sigma(x) \times \sigma(y) \subseteq I\} \setminus Id_X$. Die Kongruenzrelation $\equiv_{I(\sigma)}$ auf der Menge X^* bezeichnen wir kurz mit $\equiv_\sigma$. Die Funktion σ soll die Bedeutung einer Alphabetzuweisung haben, d.h. eine Variable $x \in X$ darf nur mit solchen Spuren $\boldsymbol{u}$ belegt werden, für die $\mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \sigma(x)$ gilt. Dies erklärt auch die Definition der Unabhängigkeitsrelation $I(\sigma)$.

Wir formulieren nun einige Lemmata, in denen Aussagen der folgenden Form gemacht werden: Eine Formel ϕ, die von einer gewissen Gestalt ist, ist in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel φ von einer in einem gewissen Sinne einfacheren Gestalt. Für die späteren Betrachtungen wird es dabei wichtig sein, daß die Formel φ effektiv aus der Formel ϕ konstruiert werden kann. Wir werden diese Tatsache in den folgenden Lemmata nicht explizit mit aufführen. In den nächsten beiden Lemmata gelte $I = \emptyset$, d.h. es werden Aussagen über das freie Monoid Σ^* gemacht. Die erste Aussage ist lediglich eine Abschwächung einer bekannten Aussage über konjugierte Wörter.

Lemma 6.2.1. Seien $s, t \in \Sigma^+$ nicht–leere Wörter und sei $x \in \mathit{Var}$. Die Wortgleichung $sx = xt$ ist in Σ^* äquivalent zu einer Formel der Form $x \in L$, wobei $L \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ gilt.

Beweis. Seien $s, t \in \Sigma^+$. Dann gilt für alle $u \in \Sigma^*$ die folgende Aussage, siehe z.B. [Lot83]: $su = ut$ genau dann, wenn Wörter $v, w \in \Sigma^*$ und ein $n \geq 0$ mit $w \neq 1$, $s = vw$, $t = wv$ und $u = s^n v$ existieren. Hieraus ergibt sich das Lemma unmittelbar. □

Das nächste Lemma verallgemeinert das vorherige Lemma auf den Fall mehrerer Variablen.

Lemma 6.2.2. Seien $s_1, \ldots, s_{m+1}, t_1, \ldots, t_{m+1} \in \Sigma^*$. Dann ist die Wortgleichung

$$s_1 x_1 s_2 \cdots x_m s_{m+1} = t_1 x_1 t_2 \cdots x_m t_{m+1} \tag{6.1}$$

in Σ^* äquivalent zu einer Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ der Gestalt $\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=1}^{m} x_i \in L_{i,\alpha}$, wobei $L_{i,\alpha} \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle α gilt.

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch eine Induktion über m. Der Fall $m = 0$ ist trivial. Sei also $m > 0$. Ist weder s_1 ein Präfix von t_1 noch t_1 ein Präfix von s_1, so können wir für φ die Formel $x_1 \in \emptyset \wedge \cdots \wedge x_n \in \emptyset$ wählen. Gelte also o.B.d.A. $s_1 = t_1 s$. Kürzen von t_1 ergibt die Gleichung $s x_1 s_2 \cdots x_m s_{m+1} = x_1 t_2 \cdots x_m t_{m+1}$. Gilt $s = 1$, so können wir auch die Variable x_1 kürzen. Aus der Induktionshypothese folgt, daß die Wortgleichung $s_2 x_2 s_3 \cdots x_m s_{m+1} = t_2 x_2 t_3 \cdots x_m t_{m+1}$ zu einer endlichen Disjunktion der Gestalt $\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=2}^{m} x_i \in L_{i,\alpha}$ äquivalent ist, wobei $L_{i,\alpha} \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ für alle $i \in \{2, \ldots, m\}$ und alle α gilt. Also ist die Wortgleichung (6.1) äquivalent zu der endlichen Disjunktion $\bigvee_{\alpha} (x_1 \in \Sigma^* \wedge \bigwedge_{i=2}^{m} x_i \in L_{i,\alpha})$. Gelte nun $s \neq 1$. Wir können nun die Position in $t_2 x_2 \cdots t_m x_m t_{m+1}$ raten, an der $s x_1$ endet. Genauer ist die Wortgleichung $s x_1 s_2 \cdots x_m s_{m+1} = x_1 t_2 \cdots x_m t_{m+1}$ äquivalent zu der endlichen Disjunktion aller endlich vielen Formeln der Gestalt

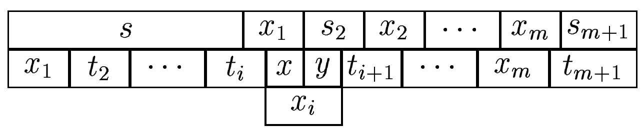
(1) $sx_1 = x_1 t_2 x_2 \cdots t_{i-1} x_{i-1} t' \wedge s_2 x_2 s_3 \cdots x_m s_{m+1} = t'' x_i t_{i+1} \cdots x_m t_{m+1}$ mit $2 \leq i \leq m+1$ und $t_i = t't''$ (d.h. sx_1 endet in t_i) und

(2) $\exists x, y : x_i = xy \;\wedge\; sx_1 = x_1 t_2 \cdots x_{i-1} t_i x \;\wedge$
$$s_2 x_2 s_3 \cdots x_m s_{m+1} = y t_{i+1} x_{i+1} t_{i+2} \cdots x_m t_{m+1},$$
wobei $i \in \{2, \ldots, m\}$ gilt, und x und y neue Variablen sind (d.h. sx_1 endet in x_i, wobei $i \geq 2$ wegen $s \neq 1$ gelten muß).

Es genügt somit zu zeigen, daß jede dieser Formeln äquivalent zu einer endlichen Disjunktion der gewünschten Form ist. Betrachten wir hierzu eine Formel vom zweiten Typ[3]. Durch Substitution von xy für x_i erhalten wir die Formel

$$\begin{aligned} &\exists x, y : x_i = xy \;\wedge\; sx_1 = x_1 t_2 x_2 \cdots t_{i-1} x_{i-1} t_i x \;\wedge \\ &s_2 x_2 s_3 \cdots x_{i-1} s_i x y s_{i+1} x_{i+1} \cdots s_m x_m s_{m+1} = y t_{i+1} x_{i+1} \cdots t_m x_m t_{m+1}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

siehe auch die folgende Graphik.



Es ist zu beachten, daß für jede Lösung der Gleichung $sx_1 = x_1 t_2 \cdots x_{i-1} t_i x$, d.h. für jedes Tupel $(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u)$ mit $su_1 = u_1 t_2 \cdots u_{i-1} t_i u$, die Längenbeschränkung $|s| = |t_2 u_2 \cdots t_{i-1} u_{i-1} t_i u|$ gilt. Offensichtlich gibt es aber nur endlich viele Tupel $(u_2, \ldots, u_{i-1}, u)$, die diese Längenbeschränkung erfüllen. Wir können somit eine endliche Disjunktion über alle Tupel $(u_2, \ldots, u_{i-1}, u)$ mit $|s| = |t_2 u_2 \cdots t_{i-1} u_{i-1} t_i u|$ bilden, wobei sich jede einzelne disjunktive Teilformel durch Substitution von u_i für x_i und u für x aus (6.2) ergibt. Sei $(u_2, \ldots, u_{i-1}, u)$ eines der Tupel, über welche wir die Disjunktion bilden, und sei weiter $v = t_2 u_2 t_3 \cdots t_{i-1} u_{i-1} t_i u$ und $w = s_2 u_2 s_3 \cdots s_{i-1} u_{i-1} s_i u$. Es genügt zu zeigen, daß die Formel

$$\begin{aligned} &\exists y : x_i = uy \;\wedge\; sx_1 = x_1 v \;\wedge\; \bigwedge_{j=2}^{i-1} x_j \in \{u_j\} \;\wedge \\ &\qquad w y s_{i+1} x_{i+1} \cdots s_m x_m s_{m+1} = y t_{i+1} x_{i+1} \cdots t_m x_m t_{m+1} \end{aligned}$$

[3] Der erste Typ kann analog behandelt werden, die Betrachtung ist jedoch einfacher.

äquivalent zu einer endlichen Disjunktion der gewünschten Form ist. Nach Lemma 6.2.1 (wobei $s \neq 1$ und damit auch $v \neq 1$ zu beachten ist), kann die Gleichung $sx_1 = x_1 v$ durch eine Formel der Gestalt $x_1 \in L_1$ mit $L_1 \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ ersetzt werden. Die Induktionshypothese impliziert weiter, daß die Gleichung $wys_{i+1}x_{i+1} \cdots s_m x_m s_{m+1} = yt_{i+1}x_{i+1} \cdots t_m x_m t_{m+1}$ äquivalent zu einer endlichen Disjunktion der Gestalt $\bigvee_\alpha (y \in K_\alpha \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{m} x_j \in L_{j,\alpha})$ ist[4], wobei $K_\alpha, L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ für alle $j \in \{i+1, \ldots m\}$ und alle α gilt. Wir erhalten so die Formel

$$\exists y : x_i = uy \wedge x_1 \in L_1 \wedge \bigwedge_{j=2}^{i-1} x_j \in \{u_j\} \wedge \bigvee_\alpha (y \in K_\alpha \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{m} x_j \in L_{j,\alpha}).$$

Diese Formel ist äquivalent zu der Formel

$$\bigvee_\alpha (x_1 \in L_1 \wedge \bigwedge_{j=2}^{i-1} x_j \in \{u_j\} \wedge x_i \in uK_\alpha \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{m} x_j \in L_{j,\alpha}),$$

wobei $uK_\alpha = \{uu' \in \Sigma^* \mid u' \in K_\alpha\} \in \mathrm{REC}(\Sigma^*)$ gilt. Dies beendet den Beweis des Lemmas. □

Im folgenden sei das fixierte Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I) wieder beliebig. Das nächste Lemma verallgemeinert Lemma 6.2.2 von Wörtern auf Spuren.

Lemma 6.2.3. Sei $x_1, \ldots, x_n \in \mathit{Var}$, $\sigma : \{x_1, \ldots, x_m\} \longrightarrow 2^\Sigma$, und seien $S(x_1, \ldots, x_m)$, $T(x_1, \ldots, x_m)$ lineare Muster mit $\mathit{typ}(S) \equiv_\sigma \mathit{typ}(T)$. Dann ist die Formel

$$S(x_1, \ldots, x_m) = T(x_1, \ldots, x_m) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \mathit{alph}(x_i) \subseteq \sigma(x_i) \tag{6.3}$$

in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Disjunktion der Gestalt $\bigvee_\alpha \bigwedge_{i=1}^{m} x_i \in L_{i,\alpha}$, wobei $L_{i,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle α gilt.

[4] Es ist zu beachten, daß wegen $i \geq 2$ diese Gleichung $m - i + 1 < m$ viele Variablen enthält.

Beweis. Sei $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ eine beliebige Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma) \backslash I)$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß das Muster $S(x_1, \ldots, x_m)$ von der Form $S = s_1 x_1 s_2 x_2 \ldots s_m x_m s_{m+1}$ ist, wobei $s_i \in \Sigma^*$ gilt. Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $x_{i,j}$ eine neue Variable, die verschieden von den Variablen $x_1, \ldots, x_m$ ist. Die Variable $x_{i,j}$ soll die Projektion von x_i auf die Clique Γ_j repräsentieren. Da das Alphabet von x_i auf die Menge $\sigma(x_i)$ beschränkt ist, können wir im Fall $\sigma(x_i) \cap \Gamma_j = \emptyset$ die Variable $x_{i,j}$ durch das leere Wort 1 ersetzen. Zu diesem Zweck definieren wir $\mathcal{V}_{i,j} \in \{1\} \cup \{x_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ durch (i) $\mathcal{V}_{i,j} = 1$ falls $\sigma(x_i) \cap \Gamma_j = \emptyset$ gilt, und (ii) $\mathcal{V}_{i,j} = x_{i,j}$ sonst. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei das Muster S_j definiert durch

$$S_j = \pi_{\Gamma_j}(s_1)\mathcal{V}_{1,j}\pi_{\Gamma_j}(s_2)\mathcal{V}_{2,j} \cdots \pi_{\Gamma_j}(s_m)\mathcal{V}_{m,j}\pi_{\Gamma_j}(s_{m+1}).$$

Das Muster S_j repräsentiert somit die Projektion von S auf die Clique Γ_j. Das Muster T_j ist analog definiert. Wir behaupten $typ(S_j) = typ(T_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dies kann wie folgt gezeigt werden:

> Wegen $typ(S) \equiv_\sigma typ(T)$ existieren ein $\kappa \ge 0$, sowie Typen $\mathcal{T}_k$ und $\mathcal{U}_k$ und Variablen $y_k, z_k \in \{x_1, \ldots, x_m\}$ für $k \in \{0, \ldots \kappa - 1\}$ mit
>
> - $typ(S) = \mathcal{S}_0 \equiv_\sigma \mathcal{S}_1 \equiv_\sigma \cdots \equiv_\sigma \mathcal{S}_\kappa = typ(T)$,
> - $\mathcal{S}_k = \mathcal{T}_k y_k z_k \mathcal{U}_k, \quad \mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{T}_k z_k y_k \mathcal{U}_k \quad$ und $\quad y_k \, I(\sigma) \, z_k$.
>
> Insbesondere gilt $\sigma(y_k) \times \sigma(z_k) \subseteq I$. Für $k \in \{0, \ldots, \kappa\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\mathcal{S}_{k,j}$ der Typ, der aus $\mathcal{S}_j$ durch Ersetzen jeder Variablen x_i durch $\mathcal{V}_{i,j}$ entsteht. Es folgt $typ(S_j) = \mathcal{S}_{0,j}$ und $typ(T_j) = \mathcal{S}_{\kappa,j}$. Es muß somit nur noch $\mathcal{S}_{k,j} = \mathcal{S}_{k+1,j}$ für alle $k \in \{0, \ldots \kappa - 1\}$ gezeigt werden. Hierfür genügt es, $\sigma(y_k) \cap \Gamma_j = \emptyset$ oder $\sigma(z_k) \cap \Gamma_j = \emptyset$ für alle $k \in \{0, \ldots \kappa - 1\}$ zu zeigen. Angenommen es gilt $\sigma(y_k) \cap \Gamma_j \neq \emptyset \neq \sigma(z_k) \cap \Gamma_j$. Also existieren $a \in \sigma(y_k) \cap \Gamma_j$ und $b \in \sigma(z_k) \cap \Gamma_j$. Wegen $a, b \in \Gamma_j$ gilt $(a, b) \notin I$. Wegen $a \in \sigma(y_k)$ und $b \in \sigma(z_k)$ widerspricht dies aber $\sigma(y_k) \times \sigma(z_k) \subseteq I$.

Weiter folgt aus Lemma 2.1.1, daß die Formel (6.3) in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu der Formel

$$\exists x_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) : \\ \bigwedge_{j=1}^{n}(S_j = T_j \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{m} \pi_{\Gamma_j}(x_i) = x_{i,j} \ \wedge \ \mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \sigma(x_i) \cap \Gamma_j) \quad (6.4)$$

ist. Wegen $\mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \Gamma_j$, und da Γ_j eine Clique für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist, kann die Gleichung $S_j = T_j$ als eine Wortgleichung über dem Alphabet Γ_j betrachtet werden. Mit $\mathit{typ}(S_j) = \mathit{typ}(T_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgt aus Lemma 6.2.2, daß die Formel $S_j = T_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \sigma(x_i) \cap \Gamma_j$ in Γ_j^* äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=1}^{m} x_{i,j} \in L_{i,j,\alpha}$ ist, wobei $L_{i,j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\Gamma_j^*)$ für alle α gilt. Also ist (6.4) in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu der Formel

$$\exists x_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) : \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=1}^{m} (x_{i,j} \in L_{i,j,\alpha} \ \wedge \ \pi_{\Gamma_j}(x_i) = x_{i,j}),$$

welche wiederum äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln der Gestalt

$$\exists x_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) : \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} (x_{i,j} \in L_{i,j} \ \wedge \ \pi_{\Gamma_j}(x_i) = x_{i,j}),$$

d.h $\bigwedge_{i=1}^{m} x_i \in \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \bigwedge_{j=1}^{n} \pi_j(\boldsymbol{u}) \in L_{i,j}\}$, ist, wobei $L_{i,j} \in \mathrm{REC}(\Gamma_j^*)$ gilt. Nach Lemma 2.3.3 gilt $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I) \mid \bigwedge_{j=1}^{n} \pi_j(\boldsymbol{u}) \in L_{i,j}\} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$, was den Beweis beendet. $\square$

Das folgende Lemma ist eine einfache Konsequenz aus Lemma 2.2.2, siehe auch Abbildung 6.1. Es sollte beachtet werden, daß eine Formel $\varphi(x, y)$ der Form $\bigvee_{\alpha}(\mathit{alph}(x) \subseteq \sigma_\alpha(x) \ \wedge \ \mathit{alph}(y) \subseteq \sigma_\alpha(y))$ existiert so, daß $\varphi(x, y)$ unter der Belegung $x \mapsto s$, $y \mapsto t$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ genau dann wahr wird, falls $[s]_I \, I \, [t]_I$ gilt.

y_3	$z_{1,3}$	$s_{1,3}$	$z_{2,3}$	$s_{2,3}$	$z_{3,3}$
t_2	$t_{1,2}$	$u_{1,2}$	$t_{2,2}$	$u_{2,2}$	$t_{3,2}$
y_2	$z_{1,2}$	$s_{1,2}$	$z_{2,2}$	$s_{2,2}$	$z_{3,2}$
t_1	$t_{1,1}$	$u_{1,1}$	$t_{2,1}$	$u_{2,1}$	$t_{3,1}$
y_1	$z_{1,1}$	$s_{1,1}$	$z_{2,1}$	$s_{2,1}$	$z_{3,1}$
	x_1	s_1	x_2	s_2	x_3

Abbildung 6.1: Die Gleichung $x_1 s_1 x_2 s_2 x_3 = y_1 t_1 y_2 t_2 y_3$: Die $[u_{i,j}]_I$ repräsentieren hierbei Faktoren der Spuren $[s_i]_I$, $[t_j]_I$, die nicht in den disjunktiven Teilformeln auftreten, über die jedoch die Disjunktion gebildet wird.

Lemma 6.2.4. Seien $S(x_1,\ldots,x_m)$ und $T(y_1,\ldots,y_n)$ lineare Muster mit $\mathit{typ}(S) = x_1\cdots x_m$, $\mathit{typ}(T) = y_1\cdots y_n$ und $\mathit{Var}(S)\cap \mathit{Var}(T) = \emptyset$. Sei weiter $\sigma : \{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\} \longrightarrow 2^\Sigma$. Dann ist die Formel

$$S(x_1,\ldots,x_m) = T(y_1,\ldots,y_n) \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{m} \mathit{alph}(x_i) \subseteq \sigma(x_i) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{n} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \sigma(y_j)$$

in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer endlichen Disjunktion der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists z_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) :$$

$$\bigwedge_{i=1}^{m} x_i = T_{i,\alpha}(z_{i,1}, z_{i,2},\ldots,z_{i,n}) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{n} y_j = S_{j,\alpha}(z_{1,j}, z_{2,j},\ldots,z_{m,j}) \;\wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n} \mathit{alph}(z_{i,j}) \subseteq \tau_\alpha(z_{i,j}),$$

wobei für alle α gilt:

- $\tau_\alpha : \{z_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $\mathit{typ}(S_{j,\alpha}) = z_{1,j} z_{2,j}\cdots z_{m,j}$ und $\mathit{typ}(T_{i,\alpha}) = z_{i,1} z_{i,2}\cdots z_{i,n}$
- $((i < k,\, l < j)$ oder $x_i\, I(\sigma)\, x_k$ oder $y_j\, I(\sigma)\, y_l)$ impliziert $z_{i,j}\, I(\tau_\alpha)\, z_{k,l}$

Lemma 6.2.5. Seien $s_0, s_1, \dots, s_n \in \Sigma^*$, seien $x_1, \dots, x_n$ und x paarweise verschiedene Variablen, und sei $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$. Dann ist die Formel

$$x = s_0 x_1 s_1 \cdots x_{n-1} s_{n-1} x_n s_n \ \wedge\ x \in L \tag{6.5}$$

in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer endlichen Disjunktion der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} (x = s_0 x_1 s_1 \cdots x_{n-1} s_{n-1} x_n s_n \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in L_{i,\alpha}),$$

wobei $L_{i,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle α gilt.

Beweis. Sei $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ eine Formel von der Gestalt (6.5). Sei (Q, h, F) ein $\mathbb{M}(\Sigma, I)$–Automat, welcher L erkennt. Für $i \in \{0, \dots, n\}$ sei $h(s_i) = a_i$. Wir bilden nun eine endliche Disjunktion über alle endlich vielen Folgen $b_1, \dots, b_n$ von n Elementen $b_i \in Q$ so, daß $a_0 b_1 a_1 \cdots b_{n-1} a_{n-1} b_n a_n \in F$ gilt. Für jede solche Folge $b_1, \dots, b_n$ notieren wir die Formel

$$x = s_0 x_1 s_1 \cdots x_{n-1} s_{n-1} x_n s_n \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in h^{-1}(b_i).$$

Es ist leicht zu sehen, daß die so resultierende Formel äquivalent zu φ ist. □

Unter einem gerichteten Graph verstehen wir ein Paar $(\{1, \dots, n\}, E)$, wobei E eine binäre Relation auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ ist. Wir sagen, daß der gerichtete Graph $(\{1, \dots, n\}, E)$ *schwach zusammenhängend* ist, falls der (ungerichtete) Graph $(\{1, \dots, n\}, \{(i,j) \mid i \neq j, (i,j) \in E \vee (j,i) \in E\})$ zusammenhängend ist. Sei $n \geq 1$, seien $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Variablen, und sei $(\{1, \dots, n\}, E)$ ein schwach zusammenhängender gerichteter Graph. Weiter sei $\mathcal{R}_{i,j}$ für alle $(i,j) \in E$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$. Dann nennen wir die Formel $\bigwedge_{(i,j) \in E} (x_i \rightarrow_{\mathcal{R}_{i,j}} x_j)$ eine *zusammenhängende Konjunktion.* Ist $\mathcal{R}$ das triviale SES $\{1 \to 1\}$, so gilt $x \rightarrow_{\mathcal{R}} y$ genau dann, wenn $x = y$ gilt, weshalb also auch die Gleichheit von Variablen in zusammenhängenden Konjunktionen ausgedrückt werden kann.

Lemma 6.2.6. Sei $(\{1, \dots, n\}, E)$ schwach zusammenhängend. Eine zusammenhängende Konjunktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ von der Form $\bigwedge_{(i,j) \in E} (x_i \rightarrow_{\mathcal{R}_{i,j}} x_j)$

ist in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \ldots, y_m \left[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \ldots, y_m) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \;\wedge\; alph(y_j) \subseteq \sigma_\alpha(y_j)\right],$$

wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$
- $\sigma_\alpha : \{y_1, \ldots, y_m\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $typ(S_{k,\alpha}) \equiv_{\sigma_\alpha} typ(S_{i,\alpha})$ für alle $k, i \in \{1, \ldots, n\}$

Beweis. Seien E und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ wie im Lemma beschrieben. Wir beweisen das Lemma durch eine Induktion über $|E|$. Gilt $E = \emptyset$, so muß $n = 1$ gelten, und $\varphi(x_1)$ liefert für jedes x_1 den Wahrheitswert wahr. Wir können dann die Formel $\exists y_1 : x_1 = y_1$ wählen. Sei nun $E \neq \emptyset$. Wir können dann die folgenden drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $E = \{(i,j)\} \cup F$, $i \neq j$ und $(\{1, \ldots, n\}, F)$ ist schwach zusammenhängend:

O.B.d.A. können wir $i = 1$ und $j = 2$ annehmen. Aus der Induktionshypothese folgt, daß die Formel $\bigwedge_{(i,j)\in F} (x_i \rightarrow_{\mathcal{R}_{i,j}} x_j)$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \ldots, y_m \left[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \ldots, y_m) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \;\wedge\; alph(y_j) \subseteq \tau_\alpha(y_j)\right]$$

ist, wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$
- $\tau_\alpha : \{y_1, \ldots, y_m\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $typ(S_{k,\alpha}) \equiv_{\tau_\alpha} typ(S_{i,\alpha})$ für alle $k, i \in \{1, \ldots, n\}$

Also ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu der Formel

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \ldots, y_m \Big[x_1 \rightarrow_{\mathcal{R}_{1,2}} x_2 \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \ldots, y_m) \;\wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \;\wedge\; alph(y_j) \subseteq \tau_\alpha(y_j)\Big].$$

Ersetzen von $x_1 \to_{\mathcal{R}_{1,2}} x_2$ durch $\bigvee\limits_{([\ell]_I,[r]_I)\in\mathcal{R}_{1,2}} \exists z_1, z_2\,(x_1 = z_1\ell z_2 \wedge x_2 = z_1 r z_2)$ und einige elementare logische Umformungen (nach außen schieben der Disjunktion $\bigvee\limits_{([\ell]_I,[r]_I)\in\mathcal{R}_{1,2}}$ und des Quantorenpräfix $\exists z_1, z_2$) ergeben die Formel

$$\bigvee_{\alpha} \bigvee_{([\ell]_I,[r]_I)\in\mathcal{R}_{1,2}} \exists y_1,\dots,y_m,z_1,z_2\,\big[S_{1,\alpha} = z_1\ell z_2 \wedge S_{2,\alpha} = z_1 r z_2 \wedge \\ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1,\dots,y_m) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \wedge \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau_\alpha(y_j)\big].$$

Für die weiteren Betrachtungen genügt es, in der obigen Formel eine Regel $([\ell]_I,[r]_I) \in \mathcal{R}_{1,2}$ und ein α auszuwählen und zu zeigen, daß die folgende Formel äquivalent zu einer Formel von der gewünschten Form ist, wobei wir den Index α weggelassen haben:

$$\exists y_1,\dots,y_m,z_1,z_2\,\big[S_1(y_1,\dots,y_m) = z_1\ell z_2 \wedge S_2(y_1,\dots,y_m) = z_1 r z_2 \wedge \\ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1,\dots,y_m) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_j \wedge \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau(y_j)\big], \tag{6.6}$$

wobei $L_j \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma,I))$ für alle $j \in \{1,\dots,m\}$ und $\mathit{typ}(S_k) \equiv_\tau \mathit{typ}(S_i)$ für alle $k,i \in \{1,\dots,n\}$ gilt. O.B.d.A. können wir $\mathit{typ}(S_1) = y_1y_2\cdots y_m$ annehmen. Nach Lemma 6.2.4 können wir die Teilformel

$$S_1(y_1,\dots,y_m) = z_1\ell z_2 \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau(y_j)$$

von (6.6) durch eine endliche Disjunktion der Form

$$\bigvee_{\beta} \exists y_{i,j}(1 \le i \le m, 1 \le j \le 2):\\ z_1 = T_\beta(y_{1,1},y_{2,1},\dots,y_{m,1}) \wedge z_2 = U_\beta(y_{1,2},y_{2,2},\dots,y_{m,2}) \wedge \\ \bigwedge_{i=1}^{m} y_i = y_{i,1}\ell_{i,\beta}y_{i,2} \wedge \mathit{alph}(y_{i,1}) \subseteq \sigma_\beta(y_{i,1}) \wedge \mathit{alph}(y_{i,2}) \subseteq \sigma_\beta(y_{i,2})$$

ersetzen, wobei für alle β gilt:

- $typ(T_\beta) = y_{1,1}y_{2,1}\cdots y_{m,1}$ und $typ(U_\beta) = y_{1,2}y_{2,2}\cdots y_{m,2}$
- $((i < k,\ j = 2,\ l = 1)$ oder $y_i\, I(\tau)\, y_k)$ impliziert $y_{i,j}\, I(\sigma_\beta)\, y_{k,l}$

Durch einige elementare logische Umformungen (nach außen schieben von $\bigvee_\beta$ und des Quantorenpräfix $\exists y_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2)$) kann die Formel, die aus (6.6) durch diesen Ersetzungsschritt entsteht, auf die folgende Form gebracht werden:

$$
\begin{aligned}
&\bigvee_\beta \exists y_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2)\, \exists y_1, \ldots, y_m, z_1, z_2 : \\
&\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1, \ldots, y_m) \ \wedge\ \bigwedge_{j=1}^{m} y_j = y_{j,1}\ell_{j,\beta}y_{j,2} \ \wedge\ S_2 = z_1 r z_2 \ \wedge \\
&\qquad z_1 = T_\beta(y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1}) \ \wedge\ z_2 = U_\beta(y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots, y_{m,2}) \ \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{j=1}^{m} alph(y_{j,1}) \subseteq \sigma_\beta(y_{j,1}) \ \wedge\ alph(y_{j,2}) \subseteq \sigma_\beta(y_{j,2}) \ \wedge\ y_j \in L_j
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Indem wir wieder ein β in der obigen Formel auswählen, genügt es, die Formel

$$
\begin{aligned}
&\exists y_{i,j}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2)\, \exists y_1, \ldots, y_m, z_1, z_2 : \\
&\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1, \ldots, y_m) \ \wedge\ \bigwedge_{j=1}^{m} y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \ \wedge\ S_2 = z_1 r z_2 \ \wedge \\
&\qquad z_1 = T(y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1}) \ \wedge\ z_2 = U(y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots, y_{m,2}) \ \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{j=1}^{m} alph(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \ \wedge\ alph(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2}) \ \wedge\ y_j \in L_j
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

weiter zu betrachten, wobei gilt:

- $typ(T) = y_{1,1}y_{2,1}\cdots y_{m,1}$ und $typ(U) = y_{1,2}y_{2,2}\cdots y_{m,2}$
- $((i < k,\ j = 2,\ l = 1)$ oder $y_i\, I(\tau)\, y_k)$ impliziert $y_{i,j}\, I(\sigma)\, y_{k,l}$

Nach Lemma 6.2.5 ist die Teilformel $\bigwedge_{j=1}^{m}(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \ \wedge\ y_j \in L_j)$ von (6.8) äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$
\bigwedge_{j=1}^{m}\Big(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \ \wedge\ \bigvee_\beta y_{j,1} \in L_{j,1,\beta} \ \wedge\ y_{j,2} \in L_{j,2,\beta}\Big),
$$

wobei $L_{j,k,\beta} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2\}$ und alle β gilt. Diese Formel kann wiederum auf die Form

$$\bigvee_{\gamma} \bigwedge_{j=1}^{m} (y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \wedge y_{j,1} \in L_{j,1,\gamma} \wedge y_{j,2} \in L_{j,2,\gamma})$$

mit $L_{j,k,\gamma} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2\}$ und alle γ gebracht werden. Einsetzen dieser Formel in (6.8) ergibt die Formel

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{\gamma} \exists y_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le 2)\, \exists y_1, \dots, y_m, z_1, z_2 : \\
&\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1, \dots, y_m) \wedge S_2 = z_1 r z_2 \wedge z_1 = T \wedge z_2 = U \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{j=1}^{m} \big(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \wedge y_{j,1} \in L_{j,1,\gamma} \wedge y_{j,2} \in L_{j,2,\gamma} \wedge \\
&\qquad\qquad \mathit{alph}(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \wedge \mathit{alph}(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2})\big).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Es genügt wieder eine disjunktive Teilformel

$$\begin{aligned}
&\exists y_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le 2)\, \exists y_1, \dots, y_m, z_1, z_2 : \\
&\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1, \dots, y_m) \wedge S_2 = z_1 r z_2 \wedge z_1 = T \wedge z_2 = U \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{j=1}^{m} \big(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \wedge y_{j,1} \in L_{j,1} \wedge y_{j,2} \in L_{j,2} \wedge \\
&\qquad\qquad \mathit{alph}(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \wedge \mathit{alph}(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2})\big)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

von (6.9) weiter zu betrachten, wobei $L_{j,k} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I)$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2\}$ gilt. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir nun

$$T_i = S_i(\dots (y_{j,1}\ell_j y_{j,2})/y_j \dots).$$

Durch Elimination der existentiell quantifizierten Variablen $y_1, \dots, y_m, z_1$

und z_2 in (6.10) erhalten wir die zu (6.10) äquivalente Formel

$$\exists y_{i,j}(1 \le i \le m, 1 \le j \le 2)\,\Big[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = T_i \,\wedge\, T_2 = TrU \,\wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{m}\big(alph(y_{i,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \,\wedge\, alph(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2}) \,\wedge$$
$$y_{j,1} \in L_{j,1} \,\wedge\, y_{j,2} \in L_{j,2}\big)\Big]. \qquad (6.11)$$

Wir behaupten, daß $typ(T_i) \equiv_\sigma typ(T_k)$ für alle $i,k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt. Aus $y_{i,j}\, I(\sigma)\, y_{k,l}$ falls $y_i\, I(\tau)\, y_k$ folgt zunächst $y_{i,1}y_{i,2}\, I(\sigma)\, y_{k,1}y_{k,2}$ falls $y_i\, I(\tau)\, y_k$. Zusammen mit $typ(S_i) \equiv_\tau typ(S_k)$ ergibt dies wie behauptet

$$typ(T_i) = typ(S_i)(\ldots y_{j,1}y_{j,2}/y_j \ldots) \equiv_\sigma typ(S_k)(\ldots y_{j,1}y_{j,2}/y_j \ldots) = typ(T_k).$$

Weiter behaupten wir, daß $typ(T_2) \equiv_\sigma typ(TrU)$ gilt:

$$\begin{aligned} typ(T_2) \equiv_\sigma typ(T_1) &= typ(S_1)(\ldots y_{j,1}y_{j,2}/y_j \ldots) \\ &= y_{1,1}y_{1,2}\cdots y_{m,1}y_{m,2} && (typ(S_1) = y_1y_2\cdots y_m) \\ &\equiv_\sigma y_{1,1}\cdots y_{m,1}y_{1,2}\cdots y_{m,2} && (y_{i,2}\, I(\sigma)\, y_{j,1} \text{ für } i<j) \\ &= typ(T)\,typ(U) = typ(TrU) \end{aligned}$$

Also können wir nach Lemma 6.2.3 die Gleichung $T_2 = TrU$ in (6.11) durch eine Formel der Gestalt $\bigvee_{\zeta}\bigwedge_{j=1}^{m} y_{j,1} \in K_{j,1,\zeta} \wedge y_{j,2} \in K_{j,2,\zeta}$ ersetzen, wobei $K_{j,k,\zeta} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma,I))$ für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$, $k \in \{1,2\}$ und alle ζ gilt. Einsetzen dieser Formel in (6.11) ergibt eine Formel der gewünschten Form. Dies beschließt die Behandlung von Fall 1. Die Behandlung der restlichen zwei Fälle verläuft ähnlich zu den obigen Überlegungen, weshalb wir deren Behandlung kürzer gestalten.

Fall 2: $E = \{(i,j)\} \cup F$, $i \ne j$ und $F \subseteq (\{1,\ldots,n\}\backslash\{j\}) \times (\{1,\ldots,n\}\backslash\{j\})$, d.h. der Knoten j ist nur über den Knoten i mit dem restlichen Graphen verbunden[5]. O.B.d.A. können wir $i=2$ und $j=1$ annehmen. Dann muß $(\{2,\ldots,n\},F)$ schwach zusammenhängend sein. Aus der Induktionshypothese folgt, daß die Formel $\bigwedge_{(i,j)\in F} (x_i \to_{\mathcal{R}_{i,j}} x_j)$ in $\mathbb{M}(\Sigma,I)$ äquivalent zu einer

[5] Der Fall, daß $E = \{(i,j)\} \cup F$ und $F \subseteq (\{1,\ldots,n\}\backslash\{i\}) \times (\{1,\ldots,n\}\backslash\{i\})$ gilt, kann analog behandelt werden.

Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \dots, y_m \, [\bigwedge_{i=2}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \dots, y_m) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \;\wedge\; \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau_\alpha(y_j)]$$

ist, wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$
- $\tau_\alpha : \{y_1, \dots, y_m\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $\mathit{typ}(S_{k,\alpha}) \equiv_{\tau_\alpha} \mathit{typ}(S_{i,\alpha})$ für alle $k, i \in \{2, \dots, n\}$

Wie in Fall 1 (siehe Formel (6.6)) genügt es, eine Formel der Gestalt

$$\begin{aligned} &\exists y_1, \dots, y_m, z_1, z_2 \big[x_1 = z_1 r z_2 \;\wedge\; S_2(y_1, \dots, y_m) = z_1 \ell z_2 \;\wedge \\ &\qquad \bigwedge_{i=2}^{n} x_i = S_i(y_1, \dots, y_m) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_j \;\wedge\; \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau(y_j)\big] \end{aligned} \tag{6.12}$$

weiter zu betrachten, wobei $([\ell]_I, [r]_I) \in \mathcal{R}_{2,1}$ und $\mathit{typ}(S_k) \equiv_\tau \mathit{typ}(S_i)$ für alle $k, i \in \{2, \dots, n\}$ gilt. O.B.d.A. können wir $\mathit{typ}(S_2) = y_1 y_2 \cdots y_m$ annehmen. Nach einer Anwendung von Lemma 6.2.4 auf die Teilformel

$$S_2(y_1, \dots, y_m) = z_1 \ell z_2 \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \tau(y_j)$$

von (6.12) kann wie in Fall 1 die Formel (6.12) auf eine Formel vom folgenden Typ reduziert werden (siehe auch Formel (6.8) in Fall 1):

$$\begin{aligned} &\exists y_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le 2) \, \exists y_1, \dots, y_m, z_1, z_2 : \\ &\quad x_1 = z_1 r z_2 \;\wedge\; \bigwedge_{i=2}^{n} x_i = S_i(y_1, \dots, y_m) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{m} y_j = y_{j,1} \ell_j y_{j,2} \;\wedge \\ &\quad z_1 = T(y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1}) \;\wedge\; z_2 = U(y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{m,2}) \;\wedge \\ &\quad \bigwedge_{j=1}^{m} \mathit{alph}(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \;\wedge\; \mathit{alph}(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2}) \;\wedge\; y_j \in L_j, \end{aligned} \tag{6.13}$$

wobei gilt:

- $typ(T) = y_{1,1}y_{2,1}\cdots y_{m,1}$ und $typ(U) = y_{1,2}y_{2,2}\cdots y_{m,2}$
- $((i<k,\ j=2,\ l=1)$ oder $y_i\, I(\tau)\, y_k)$ impliziert $y_{i,j}\, I(\sigma)\, y_{k,l}$

Lemma 6.2.5 angewandt auf die Teilformel $\bigwedge_{j=1}^{m}(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \wedge y_j \in L_j)$ ergibt schließlich den folgenden Formeltyp (siehe auch die Formel (6.10) in Fall 1):

$$\begin{aligned}
&\exists y_{i,j}(1\le i\le m, 1\le j\le 2)\,\exists y_1,\ldots,y_m,z_1,z_2 :\\
&\quad x_1 = z_1 r z_2 \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} x_i = S_i(y_1,\ldots,y_m) \wedge z_1 = T \wedge z_2 = U \wedge\\
&\quad \bigwedge_{j=1}^{m}\big(y_j = y_{j,1}\ell_j y_{j,2} \wedge y_{j,1}\in L_{j,1} \wedge y_{j,2}\in L_{j,2} \wedge\\
&\qquad\quad alph(y_{j,1})\subseteq \sigma(y_{j,1}) \wedge alph(y_{j,2})\subseteq\sigma(y_{j,2})\big)
\end{aligned}\tag{6.14}$$

Sei nun $T_1 = TrU$ sowie $T_i = S_i(\ldots(y_{j,1}\ell_j y_{j,2})/y_j\ldots)$ für $i\in\{2,\ldots,n\}$. Elimination der existentiell quantifizierten Variablen $y_1,\ldots,y_m,z_1$ und z_2 in (6.14) ergibt die zu (6.14) äquivalente Formel

$$\begin{aligned}
&\exists y_{i,j}(1\le i\le m, 1\le j\le 2)\Big[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = T_i \wedge\\
&\qquad \bigwedge_{j=1}^{m}\big(alph(y_{j,1})\subseteq\sigma(y_{j,1}) \wedge alph(y_{j,2})\subseteq\sigma(y_{j,2}) \wedge\\
&\qquad\qquad y_{j,1}\in L_{j,1} \wedge y_{j,2}\in L_{j,2}\big)\Big].
\end{aligned}\tag{6.15}$$

Wir behaupten, daß $typ(T_i)\equiv_\sigma typ(T_k)$ für alle $i,k\in\{1,\ldots,n\}$ gilt. Für $i,k\in\{2,\ldots,n\}$ kann dies wie in Fall 1 nachgeprüft werden. Sei also $i\in\{2,\ldots,n\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
typ(T_i)\equiv_\sigma typ(T_2) &= typ(S_2)(\ldots y_{j,1}y_{j,2}/y_j\ldots)\\
&= y_{1,1}y_{1,2}\cdots y_{m,1}y_{m,2} && (typ(S_2) = y_1y_2\cdots y_m)\\
&\equiv_\sigma y_{1,1}\cdots y_{m,1}y_{1,2}\cdots y_{m,2} && (y_{k,2}\, I(\sigma)\, y_{j,1} \text{ für } k<j)\\
&= typ(T)\,typ(U) = typ(T_1)
\end{aligned}$$

Also ist die Formel (6.15) von der gewünschten Form.

Fall 3: $E = \{(i,i)\} \cup F$: Dann muß $(\{1,\ldots,n\}, F)$ schwach zusammenhängend sein. O.B.d.A. können wir $i = 1$ annehmen. Aus der Induktionshypothese folgt, daß die Formel $\bigwedge_{(i,j)\in F} (x_i \rightarrow_{\mathcal{R}_{i,j}} x_j)$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1,\ldots,y_m \, [\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1,\ldots,y_m) \;\wedge \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_{j,\alpha} \;\wedge\; alph(y_j) \subseteq \tau_\alpha(y_j)]$$

ist, wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$
- $\tau_\alpha : \{y_1,\ldots,y_m\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $typ(S_{k,\alpha}) \equiv_{\tau_\alpha} typ(S_{i,\alpha})$ für alle $k, i \in \{1,\ldots,n\}$

Wie in Fall 1 (siehe Formel (6.6)) genügt es, eine Formel der Gestalt

$$\begin{aligned} &\exists y_1,\ldots,y_m, z_1, z_2 \, \big[S_1(y_1,\ldots,y_m) = z_1 \ell z_2 \;\wedge\; S_1(y_1,\ldots,y_m) = z_1 r z_2 \;\wedge \\ &\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1,\ldots,y_m) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} y_j \in L_j \;\wedge\; alph(y_j) \subseteq \tau(y_j)\big] \end{aligned} \tag{6.16}$$

weiter zu betrachten, wobei $([\ell]_I, [r]_I) \in \mathcal{R}_{1,1}$ und $typ(S_k) \equiv_\tau typ(S_i)$ für alle $k, i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt. O.B.d.A. können wir $typ(S_1) = y_1 y_2 \cdots y_m$ annehmen. Durch eine Anwendung von Lemma 6.2.4 auf die Teilformel

$$S_1(y_1,\ldots,y_m) = z_1 \ell z_2 \;\wedge \bigwedge_{j=1}^{m} alph(y_j) \subseteq \tau(y_j)$$

von (6.16) sowie eine nachfolgende Anwendung von Lemma 6.2.5 auf die so entstehende Teilformel $\bigwedge_{j=1}^{m} (y_j = y_{j,1} \ell_j y_{j,2} \;\wedge\; y_j \in L_j)$ können wir (6.16) auf eine Formel der Gestalt

$$\begin{aligned} &\exists y_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2) \, \exists y_1,\ldots,y_m, z_1, z_2 : \\ &\quad S_1 = z_1 r z_2 \;\wedge \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1,\ldots,y_m) \;\wedge\; z_1 = T \;\wedge\; z_2 = U \;\wedge \\ &\quad \bigwedge_{j=1}^{m} \big(y_j = y_{j,1} \ell_j y_{j,2} \;\wedge\; y_{j,1} \in L_{j,1} \;\wedge\; y_{j,2} \in L_{j,2} \;\wedge \\ &\qquad alph(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \;\wedge\; alph(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2})\big) \end{aligned} \tag{6.17}$$

reduzieren (siehe auch Formel (6.10) in Fall 1), wobei gilt:

- $typ(T) = y_{1,1}y_{2,1}\cdots y_{m,1}$ und $typ(U) = y_{1,2}y_{2,2}\cdots y_{m,2}$
- $((i < k,\ j = 2,\ l = 1)$ oder $y_i\, I(\tau)\, y_k)$ impliziert $y_{i,j}\, I(\sigma)\, y_{k,l}$

Wir definieren nun $T_i = S_i(\dots(y_{j,1}\ell_j y_{j,2})/y_j \dots)$ für $i \in \{1,\dots,n\}$. Durch Elimination der existentiell quantifizierten Variablen $y_1,\dots,y_m, z_1$ und z_2 in (6.17) erhalten wir die zu (6.17) äquivalente Formel

$$\begin{aligned}\exists y_{i,j}(1 \le i \le m, 1 \le j \le 2)\big[T_1 = TrU \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = T_i \ \wedge \\ \bigwedge_{j=1}^{m}\big(alph(y_{j,1}) \subseteq \sigma(y_{j,1}) \ \wedge \ alph(y_{j,2}) \subseteq \sigma(y_{j,2}) \ \wedge \\ y_{j,1} \in L_{j,1} \ \wedge \ y_{j,2} \in L_{j,2}\big)\big]. \qquad (6.18)\end{aligned}$$

Wie in Fall 1 erhalten wir $typ(T_k) \equiv_\sigma typ(T_i)$ für alle $k,i \in \{1,\dots,n\}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} typ(T_1) &= typ(S_1)(\dots y_{j,1}y_{j,2}/y_j \dots) \\ &= y_{1,1}y_{1,2}\cdots y_{m,1}y_{m,2} \\ &\equiv_\sigma y_{1,1}\cdots y_{m,1}y_{1,2}\cdots y_{m,2} \\ &= typ(T)\,typ(U) = typ(TrU). \end{aligned}$$

Also kann nach Lemma 6.2.3 die Gleichung $T_1 = TrU$ in (6.18) durch eine Formel der Gestalt $\bigvee_{\zeta}\bigwedge_{j=1}^{m}(y_{j,1} \in K_{j,1,\zeta} \ \wedge \ y_{j,2} \in K_{j,2,\zeta})$ ersetzt werden. Einsetzen dieser Formel in (6.18) ergibt eine Formel der gewünschten Form. Dies beschließt die Behandlung von Fall 3 und beendet damit den Beweis des Lemmas. $\square$

Eine genauere Analyse des obigen Beweises zeigt, daß die Anzahl der existentiell quantifizierten Variablen $y_1,\dots,y_m$ in der Formel aus Lemma 6.2.6 $2^{|E|}$ beträgt.

Lemma 6.2.7. Sei $\varphi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ eine zusammenhängende Konjunktion ($n \ge 1$). Dann ist die Formel $\exists y_1,\dots,y_m : \varphi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$

in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists z_1, \ldots, z_k \,[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(z_1, \ldots, z_k) \,\wedge\, \bigwedge_{j=1}^{k} z_j \in L_{j,\alpha} \,\wedge\, \mathit{alph}(z_j) \subseteq \sigma_\alpha(y_j)],$$

wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$
- $\sigma_\alpha : \{z_1, \ldots, z_k\} \longrightarrow 2^\Sigma$
- $\mathit{typ}(S_{i,\alpha}) \equiv_{\sigma_\alpha} \mathit{typ}(S_{j,\alpha})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Beweis. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ eine zusammenhängende Konjunktion. Nach Lemma 6.2.6 ist die Formel $\exists y_1, \ldots, y_m : \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists z_1, \ldots, z_k \,\exists y_1, \ldots, y_m \,[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(z_1, \ldots, z_k) \,\wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{m} y_j = T_{j,\alpha}(z_1, \ldots, z_k) \,\wedge\, \bigwedge_{j=1}^{k} z_j \in L_{j,\alpha} \,\wedge\, \mathit{alph}(z_j) \subseteq \sigma_\alpha(z_j)],$$

wobei (unter anderem) $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle α sowie $\mathit{typ}(S_{i,\alpha}) \equiv_{\sigma_\alpha} \mathit{typ}(S_{j,\alpha})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle α gilt. Diese Formel ist jedoch äquivalent zu

$$\bigvee_{\alpha} \exists z_1, \ldots, z_k \,[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(z_1, \ldots, z_k) \,\wedge\, \bigwedge_{j=1}^{k} z_j \in L_{j,\alpha} \,\wedge\, \mathit{alph}(z_j) \subseteq \sigma_\alpha(z_j)].$$

□

Eine Formel von der in Lemma 6.2.7 betrachteten Form sagt aus, daß die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in einer bestimmten Konfiguration bezüglich eventuell mehrerer Einschrittersetzungsrelationen stehen. Wird in Lemma 6.2.7 nicht verlangt, daß die Konjunktion φ zusammenhängend ist, so ist $\exists y_1, \ldots, y_m : \varphi$ äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln der in Lemma 6.2.7 angegebenen Form, deren freie Variablen paarweise disjunkt sind.

Nachdem wir in den bisher aufgeführten Lemmata Transformationen von gewissen Formeltypen auf (einfachere) Formeltypen als korrekt bewiesen haben, werden wir in den folgenden Lemmata diese Transformationen benutzen, um die Entscheidbarkeit der Gültigkeit (in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$) von gewissen Formeltypen zu beweisen. Wir werden diese Lemmata beweisen, indem wir mittels der bisher aufgeführten Transformationen Formeln von dem betrachteten Typ auf Formeln reduzieren, deren atomare Teilformeln alle die Form $x \in L$ haben, wobei $x \in \mathit{Var}$ und $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ gilt. Das folgende Lemma besagt, daß für solche Formeln die logische Gültigkeit in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ entscheidbar ist. Eine positive Boolesche Formel ist eine Boolesche Formel, die nur aus den Konnektiven $\wedge$ und $\vee$ aufgebaut ist.

Lemma 6.2.8. Sei φ eine Formel der Logik 1. Stufe, deren atomare Teilformeln alle von der Gestalt $x \in L$ sind, wobei $x \in \mathit{Var}$ und $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ gilt. Dann ist φ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu einer positiven Booleschen Formel, deren atomare Teilformeln ebenfalls von der Gestalt $x \in L$ sind, wobei $x \in \mathit{Var}$ und $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ gilt. Außerdem kann ϕ effektiv aus φ berechnet werden.

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch eine strukturelle Induktion über die Formel φ. Der Fall $\varphi \equiv (x \in L)$ ist trivial. Für die Fälle $\varphi \equiv \neg\varphi'$ kann die Induktionshypothese für φ' sowie Lemma 2.3.1(2) benutzt werden. Für $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ genügt nur die Induktionshypothese. Es muß somit nur noch der Fall $\varphi \equiv (\exists x : \varphi')$ betrachtet werden. Aufgrund der Induktionshypothese für φ' können wir annehmen, daß φ' von der Form $\bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i$ ist, wobei φ_i eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln der Gestalt $x \in L$ mit $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ ist. Da $\exists x : \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i$ logisch äquivalent zu $\bigvee_{i=1}^{m} \exists x : \varphi_i$ ist, genügt es, Formeln der Gestalt $\exists x : (x_1 \in L_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in L_n)$ mit $L_i \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ zu betrachten. Der Fall $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist trivial. Sei also o.B.d.A. $x = x_1$. Aufgrund von Lemma 2.3.1(2) (Abschluß erkennbarer Sprachen unter Durchschnitt) können wir $x \notin \{x_2, \ldots, x_n\}$ annehmen. Also ist $\exists x\,(x \in L_1 \wedge x_2 \in L_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in L_n)$ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ äquivalent zu $(\exists x : x \in L_1) \wedge x_2 \in L_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in L_n$. Diese Formel ist nun entweder äquivalent zum Wahrheitswert falsch (falls $L_1 = \emptyset$) oder äquivalent zu der Formel $x_2 \in L_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in L_n$. Schließlich ist noch zu beachten, daß aufgrund von Lemma 2.3.1(2) (effektiver Abschluß erkennbarer Spursprachen unter Booleschen Operationen) und Lemma 2.3.2 die vorliegende Konstruktion effektiv durchführbar ist. $\square$

Ist nun in Lemma 6.2.8 φ ein Satz, d.h. hat φ keine freien Variablen, so kann nach diesem Lemma φ effektiv auf einen der Wahrheitswerte wahr oder falsch reduziert werden. Somit kann die Gültigkeit von φ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ effektiv entschieden werden.

Der folgende Satz sagt aus, daß es entscheidbar ist, ob das Bestehen einer Konfigurationen bezüglich der Relation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ zwischen $x_1, \ldots, x_n$ das Bestehen einer anderen Konfiguration zwischen $x_1, \ldots, x_n$ impliziert. Eine unmittelbare Konsequenz dieses Resultats ist die Entscheidbarkeit der (α, β)–Konfluenz für Spurersetzungssysteme. Ich denke jedoch, daß der folgende Satz auch für sich genommen eine interessante Aussage macht.

Satz 6.2.9. Das folgende Problem ist entscheidbar:
EINGABE: Ein Satz ψ von der Form

$$\begin{aligned}\forall x_1, \ldots, x_n \, [\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \ldots, y_{m_\alpha} : \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m_\alpha}) \quad \Rightarrow \\ \bigvee_{\beta} \exists z_1, \ldots, z_{m_\beta} : \phi_\beta(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_{m_\beta})],\end{aligned}$$

wobei $n \geq 1$, und φ_α und ϕ_β für alle α und β eine zusammenhängende Konjunktion ist.
FRAGE: Ist ψ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gültig?

Beweis. Seien $\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_{m_\alpha})$ und $\phi_\beta(x_1, \ldots, x_n, z'_1, \ldots, z'_{m_\beta})$ für alle α und β zusammenhängende Konjunktionen. Sei weiter $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ die Formel

$$\bigvee_{\beta} \exists z'_1, \ldots, z'_{m_\beta} : \phi_\beta(x_1, \ldots, x_n, z'_1, \ldots, z'_{m_\beta}), \tag{6.19}$$

und sei ψ der Satz

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, [\bigvee_{\alpha} \exists y'_1, \ldots, y'_{m_\alpha} : \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_{m_\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \phi].$$

Es ist zu zeigen, daß es entscheidbar ist, ob ψ in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gültig ist. Aufgrund der Äquivalenz von $\forall x\, ((A \vee B) \;\Rightarrow\; C)$ und $\forall x\, (A \Rightarrow C) \;\wedge\; \forall x\, (B \Rightarrow C)$ genügt es, einen Satz der Gestalt

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, [\exists y'_1, \ldots, y'_m : \varphi(x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_m) \quad \Rightarrow \quad \phi] \tag{6.20}$$

weiter zu betrachten, wobei φ eine zusammenhängende Konjunktion ist. Wegen Lemma 6.2.7 können wir in diesem Satz die Teilformel

$$\exists y'_1, \ldots, y'_m : \varphi(x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_m)$$

durch eine Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1, \ldots, y_k \, [\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \ldots, y_k) \, \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} y_j \in L_{j,\alpha} \, \wedge \, \mathit{alph}(y_j) \subseteq \sigma_\alpha(y_j)]$$

ersetzen, wobei für alle α gilt:

- $L_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$
- $\sigma_\alpha : \{y_1, \ldots, y_k\} \to 2^\Sigma$
- $\mathit{typ}(S_{i,\alpha}) \equiv_{\sigma_\alpha} \mathit{typ}(S_{j,\alpha})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Definieren wir die erkennbare Spursprache $L'_{j,\alpha}$ durch

$$L'_{j,\alpha} = L_{j,\alpha} \cap \{\boldsymbol{u} \mid \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) \subseteq \sigma_\alpha(y_j)\},$$

so wird diese Formel äquivalent zu

$$\bigvee_{\alpha} \exists y_1 \in L'_{1,\alpha}, \ldots, y_k \in L'_{k,\alpha} : \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}(y_1, \ldots, y_k).$$

Einsetzen in (6.20) ergibt den Satz

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, [(\bigvee_{\alpha} \exists y_1 \in L'_{1,\alpha}, \ldots, y_k \in L'_{k,\alpha} : \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_{i,\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \phi].$$

Wieder wegen der Äquivalenz von $\forall x\,((A \vee B) \;\Rightarrow\; C)$ und $\forall x\,(A \Rightarrow C) \;\wedge\; \forall x\,(B \Rightarrow C)$ sowie der Äquivalenz von $\forall x\,((\exists y\, A) \Rightarrow B)$ und $\forall x, y\,(A \Rightarrow B)$ (falls y nicht frei in B vorkommt) genügt es, einen Satz der Gestalt

$$\forall x_1, \ldots, x_n \forall y_1 \in L'_1, \ldots, y_k \in L'_k \, [(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = S_i(y_1, \ldots, y_k)) \quad \Rightarrow \quad \phi]$$

weiter zu betrachten, wobei für eine Funktion $\sigma : \{y_1, \ldots, y_k\} \longrightarrow 2^\Sigma$ gilt:

- $typ(S_i) \equiv_\sigma typ(S_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
- $alph(\boldsymbol{u}) \subseteq \sigma(y_j)$ für alle $\boldsymbol{u} \in L'_j$

Sei $\phi(S_1, \ldots, S_n)$ die Formel, die aus $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ durch Ersetzen jedes freien Vorkommens von x_i durch S_i entsteht. Dann ist der obige Satz äquivalent zu

$$\forall y_1 \in L'_1, \ldots, y_k \in L'_k : \phi(S_1, \ldots, S_n). \tag{6.21}$$

Nun wenden wir Lemma 6.2.7 auf die Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ in (6.19) an. Wir erhalten eine äquivalente Formel von der Gestalt

$$\bigvee_\alpha \exists z_1, \ldots, z_{k_\alpha} \, \Big[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = T_{i,\alpha}(z_1, \ldots, z_{k_\alpha}) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k_\alpha} z_j \in K_{j,\alpha} \;\wedge\; alph(z_j) \subseteq \tau_\alpha(z_j)\Big],$$

wobei für alle α gilt:

- $K_{j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $j \in \{1, \ldots, k_\alpha\}$
- $\tau_\alpha : \{z_1, \ldots, z_{k_\alpha}\} \to 2^\Sigma$
- $typ(T_{i,\alpha}) \equiv_{\tau_\alpha} typ(T_{j,\alpha})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Ersetzen wir in dieser Formel x_i durch S_i, so erhalten wir den zu (6.21) äquivalenten Satz

$$\begin{aligned} &\forall y_1 \in L'_1, \ldots, y_k \in L'_k \bigvee_\alpha \exists z_1, \ldots, z_{k_\alpha} : \\ &\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} S_i = T_{i,\alpha} \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k_\alpha} alph(z_j) \subseteq \tau_\alpha(z_j) \;\wedge\; z_j \in K_{j,\alpha}. \end{aligned}$$

Da $alph(\boldsymbol{u}) \subseteq \sigma(y_j)$ für alle $\boldsymbol{u} \in L'_j$ gilt, können wir zu dem obigen Satz noch die Bedingungen $alph(y_j) \subseteq \sigma(y_j)$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ hinzufügen:

$$\begin{aligned} &\forall y_1 \in L'_1, \ldots, y_k \in L'_k \bigvee_\alpha \exists z_1, \ldots, z_{k_\alpha} : \\ &\quad \bigwedge_{i=1}^{n} S_i(y_1, \ldots, y_k) = T_{i,\alpha}(z_1, \ldots, z_{k_\alpha}) \;\wedge \\ &\quad \bigwedge_{j=1}^{k} alph(y_j) \subseteq \sigma(y_j) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k_\alpha} alph(z_j) \subseteq \tau_\alpha(z_j) \;\wedge\; z_j \in K_{j,\alpha}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Wir behaupten nun, daß für alle α die Teilformel

$$\exists z_1, \dots, z_{k_\alpha} \, [\bigwedge_{i=1}^{n} S_i(y_1, \dots, y_k) = T_{i,\alpha}(z_1, \dots, z_{k_\alpha}) \ \wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \sigma(y_j) \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{k_\alpha} \mathit{alph}(z_j) \subseteq \tau_\alpha(z_j) \ \wedge \ z_j \in K_{j,\alpha}]$$

von (6.22) äquivalent zu einer Formel ist, deren atomare Teilformeln alle von der Gestalt $x \in L$ mit $x \in \mathit{Var}$ und $L \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ sind. Mit Lemma 6.2.8 beweist dies den Satz. Betrachten wir also eine Formel der Gestalt

$$\exists z_1, \dots, z_k \, [\bigwedge_{i=1}^{n} S_i(y_1, \dots, y_m) = T_i(z_1, \dots, z_k) \ \wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{m} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \sigma(y_j) \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(z_j) \subseteq \tau(z_j) \ \wedge \ z_j \in K_j], \quad (6.23)$$

wobei $\mathit{typ}(S_i) \equiv_\sigma \mathit{typ}(S_j)$ und $\mathit{typ}(T_i) \equiv_\tau \mathit{typ}(T_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. O.B.d.A. können wir $\mathit{typ}(S_1) = y_1 y_2 \cdots y_m$ und $\mathit{typ}(T_1) = z_1 z_2 \cdots z_k$ annehmen. Nach Lemma 6.2.4 ist die Teilformel

$$S_1(y_1, \dots, y_m) = T_1(z_1, \dots, z_k) \ \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \mathit{alph}(y_j) \subseteq \sigma(y_j) \ \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(z_j) \subseteq \tau(z_j)$$

von (6.23) äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists x_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k) :$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_{i,\alpha}(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k}) \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{k} z_j = V_{j,\alpha}(x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{m,j}) \ \wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \upsilon_\alpha(x_{i,j}),$$

wobei für alle α gilt:

- $\upsilon_\alpha : \{x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k\} \longrightarrow 2^\Sigma$

- $typ(U_{i,\alpha}) = x_{i,1}x_{i,2}\cdots x_{i,k}$ und $typ(V_{j,\alpha}) = x_{1,j}x_{2,j}\cdots x_{m,j}$
- $((i < i',\, j' < j)$ oder $y_i\, I(\sigma)\, y_{i'}$ oder $z_j\, I(\tau)\, z_{j'})$ impliziert $x_{i,j}\, I(\upsilon_\alpha)\, x_{i',j'}$

Einsetzen in die Formel (6.23) liefert eine äquivalente Formel der Gestalt

$$\bigvee_\alpha \exists z_1, \ldots, z_k\, \exists x_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le k) :$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_{i,\alpha} \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k} z_j = V_{j,\alpha} \;\wedge\; \bigwedge_{i=2}^{n} S_i(y_1, \ldots, y_m) = T_i(z_1, \ldots, z_k) \;\wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{k} alph(x_{i,j}) \subseteq \upsilon_\alpha(x_{i,j}) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k} z_j \in K_j.$$

Es genügt eine der disjunktiven Teilformeln

$$\exists z_1, \ldots, z_k\, \exists x_{i,j} (1 \le i \le m, 1 \le j \le k) :$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_i \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k} z_j = V_j \;\wedge\; \bigwedge_{i=2}^{n} S_i(y_1, \ldots, y_m) = T_i(z_1, \ldots, z_k) \;\wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{k} alph(x_{i,j}) \subseteq \upsilon(x_{i,j}) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{k} z_j \in K_j \qquad (6.24)$$

mit

- $typ(U_i) = x_{i,1}x_{i,2}\cdots x_{i,k}$ und $typ(V_j) = x_{1,j}x_{2,j}\cdots x_{m,j}$
- $((i < i',\, j' < j)$ oder $y_i\, I(\sigma)\, y_{i'}$ oder $z_j\, I(\tau)\, z_{j'})$ impliziert $x_{i,j}\, I(\upsilon)\, x_{i',j'}$

weiter zu betrachten. Durch eine Anwendung von Lemma 6.2.5 auf die Teilformel $\bigwedge_{j=1}^{k} (z_j = V_j(x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{m,j}) \wedge z_j \in K_j)$ von (6.24) kann diese in eine äquivalente Formel der Gestalt

$$\bigvee_\alpha \Big(\bigwedge_{j=1}^{k} z_j = V_j(x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{m,j}) \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{m} x_{i,j} \in K_{i,j,\alpha}\Big)$$

mit $K_{i,j,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle α transformiert werden. Einsetzen in (6.24) sowie eine nachfolgende Auswahl einer disjunktiven Teilformel liefert eine Formel der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\exists z_1, \ldots, z_k\, \exists x_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k) : \\
&\quad \bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_i \,\wedge\, \bigwedge_{j=1}^{k} z_j = V_j \,\wedge\, \bigwedge_{i=2}^{n} S_i(y_1, \ldots, y_m) = T_i(z_1, \ldots, z_k) \,\wedge \\
&\qquad\qquad \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \upsilon(x_{i,j}) \,\wedge\, x_{i,j} \in K_{i,j}, \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

wobei $K_{i,j} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt. Sei $S_i' = S_i(\ldots U_j/y_j \ldots)$ und $T_i' = T_i(\ldots V_j/z_j \ldots)$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$. Durch Elimination der existentiell quantifizierten Variablen $z_1, \ldots, z_k$ in (6.25) erhalten wir die äquivalente Formel

$$\begin{aligned}
&\exists x_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k) : \\
&\quad \bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_i(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k}) \,\wedge\, \bigwedge_{i=2}^{n} S_i' = T_i' \,\wedge \\
&\qquad\qquad \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} \mathit{alph}(x_{i,j}) \subseteq \upsilon(x_{i,j}) \,\wedge\, x_{i,j} \in K_{i,j}. \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Wir behaupten, daß $\mathit{typ}(S_i') \equiv_\upsilon \mathit{typ}(T_i')$ für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$ gilt. Dies kann wie folgt abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\mathit{typ}(S_i') &= \mathit{typ}(S_i(\ldots U_j/y_j \ldots)) \\
&= \mathit{typ}(S_i)(\ldots (x_{j,1} \cdots x_{j,k})/y_j \ldots) && (\mathit{typ}(U_j) = x_{j,1} \cdots x_{j,k}) \\
&\equiv_\upsilon \mathit{typ}(S_1)(\ldots (x_{j,1} \cdots x_{j,k})/y_j \ldots) && (\mathit{typ}(S_i) \equiv_\sigma \mathit{typ}(S_1) \text{ und} \\
& && \;\; x_{i,j}\, I(\upsilon)\, z_{i',j'} \text{ falls } y_i\, I(\sigma)\, y_{i'}) \\
&= (x_{1,1} \cdots x_{1,k}) \cdots (x_{m,1} \cdots x_{m,k}) && (\mathit{typ}(S_1) = y_1 y_2 \cdots y_m) \\
&\equiv_\upsilon (x_{1,1} \cdots x_{m,1}) \cdots (x_{1,k} \cdots x_{m,k}) && (x_{i,j}\, I(\upsilon)\, x_{i',j'} \text{ falls } i < i',\, j' < j) \\
&= \mathit{typ}(T_1)(\ldots (x_{1,j} \cdots x_{m,j})/z_j \ldots) && (\mathit{typ}(T_1) = z_1 \cdots z_k) \\
&\equiv_\upsilon \mathit{typ}(T_i)(\ldots (x_{1,j} \cdots x_{m,j})/z_j \ldots) && (\mathit{typ}(T_1) \equiv_\tau \mathit{typ}(T_i) \text{ und} \\
& && \;\; x_{i,j}\, I(\upsilon)\, x_{i',j'} \text{ falls } z_j\, I(\tau)\, z_{j'}) \\
&= \mathit{typ}(T_i(\ldots V_j/z_j \ldots)) = \mathit{typ}(T_i') && (\mathit{typ}(V_j) = x_{1,j} \cdots x_{m,j})
\end{aligned}$$

Also ist jede Teilformel $S_i' = T_i' \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} alph(x_{i,j}) \subseteq \upsilon(x_{i,j})$ aus (6.26) nach Lemma 6.2.3 äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} x_{i,j} \in L_{i,j,\alpha}$, wobei $L_{i,j,\alpha} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ gilt. Dies gilt dann auch für die Teilformel

$$\bigwedge_{i=2}^{n} S_i' = T_i' \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} alph(x_{i,j}) \subseteq \upsilon(x_{i,j})$$

von (6.26), wobei hierfür der effektive Abschluß von erkennbaren Spursprachen unter Durchschnitt benötigt wird. Einsetzen in (6.26) ergibt eine äquivalente Formel der Gestalt

$$\bigvee_{\alpha} \exists x_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k) :$$
$$\bigwedge_{i=1}^{m} y_i = U_i(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} x_{i,j} \in K_{i,j} \cap L_{i,j,\alpha}. \quad (6.27)$$

Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle α sei nun

$$L_{i,\alpha} = \{[U_i(w_1/x_{i,1}, \ldots, w_k/x_{i,k})]_I \mid \forall j \in \{1, \ldots, k\} : [w_j]_I \in K_{i,j} \cap L_{i,j,\alpha}\}.$$

Da nach Lemma 2.3.1(2) $\mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$ (effektiv) abgeschlossen unter Konkatenation ist, gilt $L_{i,\alpha} \in \mathrm{REC}(\mathbb{M}(\Sigma, I))$[6]. Wegen $Var(U_i) \cap Var(U_j) = \emptyset$ für $i \neq j$, ist (6.27) äquivalent zu $\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{i=1}^{m} y_i \in L_{i,\alpha}$. Der Beweis des Satzes ist damit vollständig. □

Es sollte erwähnt werden, daß durch einen etwas technischeren Beweis die Beschränkung, daß die Konjunktionen in Satz 6.2.9 zusammenhängend sein müssen, aufgehoben werden kann. Für den folgenden Beweis von Satz 6.1.2 ist diese Verallgemeinerung jedoch nicht notwendig.

Beweis von Satz 6.1.2. Für $n > 0$ definieren wir die zusammenhängende Konjunktion $\varphi_n(x_1, \ldots, x_{n+1})$ durch $\bigwedge_{j=1}^{n} x_j \to_{\mathcal{R}} x_{j+1}$. Außerdem sei $\varphi_0(x, y)$

[6] Hierfür ist es wichtig, daß U_i ein lineares Muster ist.

die Gleichung $x = y$. Für $m, n \geq 0$ sei dann $\varphi_{m,n}(x, y)$ die Formel

$$\exists x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z : \\ \varphi_m(z, x_1, \ldots, x_{m-1}, x) \wedge \varphi_n(z, y_1, \ldots, y_{n-1}, y)$$

und $\phi_{m,n}(x, y)$ die Formel

$$\exists x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z : \\ \varphi_m(x, x_1, \ldots, x_{m-1}, z) \wedge \varphi_n(y, y_1, \ldots, y_{n-1}, z).$$

Dann ist $\mathcal{R}$ genau dann (α, β)–konfluent, wenn in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ der Satz

$$\forall x, y \, \Big(\bigvee_{m=0}^{\alpha} \bigvee_{n=0}^{\alpha} \varphi_{m,n}(x, y) \quad \Rightarrow \quad \bigvee_{m=0}^{\beta} \bigvee_{n=0}^{\beta} \phi_{m,n}(x, y) \Big)$$

gültig ist. Nach Satz 6.2.9 kann dies effektiv entschieden werden. □

6.3 Anwendungen von Satz 6.1.2

In diesem Abschnitt werden wir einige Anwendungen von Satz 6.1.2 präsentieren. Eine unmittelbare Folgerung von Satz 6.1.2 ist natürlich das folgende Korollar.

Korollar 6.3.1. Starke Konfluenz ist entscheidbar für Spurersetzungssysteme.

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, wurde in [Die90a] eine Definition von kritischen Paaren und kritischen Spuren angegeben, die sich geringfügig von Definition 2.4.3 unterscheidet, siehe auch [Die90b]. Es wurde in [Die90a] weiter gezeigt, daß die Menge aller kritischen Spuren eines SES eine erkennbare Spursprache bildet[7]. Da nun für eine erkennbare Spursprache entschieden werden kann, ob sie endlich ist, ist es also entscheidbar, ob die Menge aller kritischen Spuren (nach [Die90a]) eines SES $\mathcal{R}$ eine endliche Menge ist. Ist dies der Fall und ist $\mathcal{R}$ terminierend, so kann effektiv überprüft werden, ob

[7] Es ist leicht zu sehen, daß dieses Resultat auch für Definition 2.4.3 gilt.

$\mathcal{R}$ konfluent ist. Auf dieses Resultat aufbauend, wurde in [Die90a] das Kriterium G_k, wobei $k \in \mathbb{N}$ gilt, für Spurersetzungssysteme angegeben. Ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ erfüllt die Bedingung G_k, falls

$$\{a\boldsymbol{s} \mid a \in \Sigma, \boldsymbol{s} \in \mathrm{IRR}(\mathcal{R})\} \subseteq \\ \mathrm{IRR}(\mathcal{R}) \cup \{\boldsymbol{t\ell u} \mid |\boldsymbol{t}| \leq k,\, \boldsymbol{\ell} \in \mathit{dom}(\mathcal{R}),\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)\}$$

gilt. Da in dieser Inklusion beide Mengen offensichtlich erkennbare Spursprachen bilden, ist es entscheidbar, ob ein SES die Bedingung G_k erfüllt. In [Die90a] wurde nun gezeigt, daß für ein SES $\mathcal{R}$, welches die Bedingung G_k für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt, die Menge aller kritischen Spuren endlich ist. Es folgt, das für terminierende Spurersetzungssysteme, welche die Bedingung G_k für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllen, Konfluenz entscheidbar ist. Auch das Kriterium aus [Ott89], welches auf den Begriffen der Konvergenz und Kohärenz für Termersetzungssysteme beruht, impliziert die Existenz einer endlichen Menge von kritischen Paaren. Nach dem Kenntnisstand des Autors scheint es jedoch keine Kriterien für Spurersetzungssysteme zu geben, welche die Entscheidbarkeit der Konfluenz implizieren, jedoch nicht gleichzeitig die Endlichkeit der Menge aller kritischen Spuren voraussetzen. Mit der Bedingung (C) aus Abschnitt 5.2 haben wir ein solches Kriterium angegeben. In diesem Abschnitt werden wir weitere Kriterien dieser Art präsentieren. Die Idee ist hierbei, hinreichende Bedingungen anzugeben, welche die Äquivalenz von Konfluenz und β–Konfluenz für ein $\beta > 0$, welches effektiv bestimmt werden kann, implizieren. Dies erlaubt dann eine Anwendung von Satz 6.1.2.

Für eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ definieren wir die Menge $D(\boldsymbol{u})$ aller von $\boldsymbol{u}$ abhängigen Symbole durch $D(\boldsymbol{u}) = \{a \in \Sigma \mid \exists b \in \mathit{alph}(\boldsymbol{u}) : (a, b) \notin I\}$.

Satz 6.3.2. Das folgende Problem ist entscheidbar.
EINGABE: Ein SES $\mathcal{R}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{R}$ erfüllt die Bedingung (A) und ist terminierend.

(2) Für alle Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und alle Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$ gilt:
Für das Alphabet $\Gamma = D(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1) \cap D(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0)$ ist das SES $\pi_\Gamma(\mathcal{R})$ (welches also durch Projektion aller Regeln auf das Alphabet Γ entsteht) terminierend auf den Spuren $\pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0)$ und $\pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1)$.

FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein SES, welches die Bedingungen aus dem Satz erfüllt. Wir beweisen den Satz, indem wir effektiv ein $\beta > 0$ bestimmen so, daß $\mathcal{R}$ genau dann konfluent ist, wenn $\mathcal{R}$ β–konfluent ist. Dies erlaubt dann eine Anwendung von Satz 6.1.2.

Für alle endlich vielen Spuren $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{s}$ mit

$$(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}, \quad \boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{s} \neq 1$$

definieren wir eine natürliche Zahl $\beta(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s})$ durch

$$\begin{aligned}\beta(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s}) = max\{k \mid \exists \boldsymbol{u} : \pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1) \to^k_{\pi_\Gamma(\mathcal{R})} \pi_\Gamma(\boldsymbol{u}) \quad \text{oder} \\ \pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0) \to^k_{\pi_\Gamma(\mathcal{R})} \pi_\Gamma(\boldsymbol{u})\},\end{aligned}$$

wobei $\Gamma \subseteq \Sigma$ das Alphabet $\Gamma = D(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1) \cap D(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0)$ ist. Aus den Bedingungen an $\mathcal{R}$ folgt, daß $\beta(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s})$ effektiv berechenbar ist. Sei nun

$$\begin{aligned}\beta = max\{\beta(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{s}) \mid \\ (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R},\ \boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{s} \neq 1\}.\end{aligned}$$

Die Zahl β ist offensichtlich effektiv berechenbar. Wir behaupten, daß $\mathcal{R}$ genau dann konfluent ist, wenn $\mathcal{R}$ β–konfluent ist. Ist $\mathcal{R}$ β–konfluent, so ist $\mathcal{R}$ auch lokal konfluent. Da $\mathcal{R}$ auch terminierend ist, ist $\mathcal{R}$ konfluent. Nun nehmen wir an, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist. Wir behaupten, daß $\mathcal{R}$ β–konfluent ist. Nach Lemma 2.4.4 genügt es zu zeigen, daß alle kritischen Paare von $\mathcal{R}$ β–konfluent sind. Betrachten wir hierzu eine beliebige kritische Situation $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1) \in \mathrm{CS}(\mathcal{R})$. Nach Definition 2.4.3 existieren Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Spuren $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{w}_i$ $(i \in \{0,1\})$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$ mit

- $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0, \quad \boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1,$
- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{\ell}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0,$
  $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0,$

Da $\mathcal{R}$ konfluent ist, existieren $\beta_0, \beta_1 \geq 0$ und eine Spur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit

$$\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{q}_1 \to^{\beta_0}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{q}_0 \to^{\beta_1}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u}. \tag{6.28}$$

Sei $\Gamma = D(\boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1) \cap D(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0)$. Aus $\boldsymbol{w}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{w}_1 \, I \, \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{s} \boldsymbol{q}_1$ folgt $\pi_\Gamma(\boldsymbol{w}_0) = 1 = \pi_\Gamma(\boldsymbol{w}_1)$. Also folgt aus (6.28)

$$\pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{q}_1) \rightarrow^{\beta_0}_{\pi_\Gamma(\mathcal{R})} \pi_\Gamma(\boldsymbol{u}) \quad \text{und} \quad \pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{q}_0) \rightarrow^{\beta_1}_{\pi_\Gamma(\mathcal{R})} \pi_\Gamma(\boldsymbol{u}).$$

Aus der obigen Konstruktion von β folgt $\beta_0, \beta_1 \leq \beta$. Also ist $\mathcal{R}$ β–konfluent. $\square$

Das Entscheidbarkeitskriterium aus Satz 6.3.2 mag recht technisch erscheinen. Im folgenden geben wir zwei weniger technische Entscheidbarkeitskriterien an, die sich direkt aus Satz 6.3.2 ableiten lassen. Das folgende Korollar findet sich auch in [Loh98].

Korollar 6.3.3. Das folgende Problem ist entscheidbar:
EINGABE: Ein Spurersetzungssystem $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ so, daß eine Cliquenüberdeckung $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma) \backslash I)$ mit den folgenden Eigenschaften existiert[8]:

(1) Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und für alle Regeln $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{r}) \in \mathcal{R}$ gilt: $\pi_i(\pi_j(\boldsymbol{\ell})) = 1$ impliziert $\pi_i(\pi_j(\boldsymbol{r})) = 1$.

(2) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist das Semi–Thue System $\pi_i(\mathcal{R})$ terminierend.

FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$, und sei $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma) \backslash I)$, welche die Bedingungen (1) und (2) aus dem Satz erfüllt. Wir werden zeigen, daß dann $\mathcal{R}$ die Anforderungen an die Eingabe aus Satz 6.3.2 erfüllt.

Offensichtlich impliziert Bedingung (2) aus dem Korollar, daß $\mathcal{R}$ terminierend ist. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{R}$ die Bedingung (A) erfüllt. Sei $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{R})$. Bedingung (2) aus dem Korollar impliziert $\pi_i(\boldsymbol{\ell}) \neq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, denn sonst würde $\pi_i(\mathcal{R})$ eine Regel der Form $1 \rightarrow \pi_i(\boldsymbol{r})$ enthalten und wäre somit nicht terminierend. Also kann kein $a \in \Sigma$ mit $a \, I \, \boldsymbol{\ell}$ existieren, weshalb $\mathcal{R}$ die Bedingung (A1) erfüllt. Es muß somit noch die Bedingung (A2) gezeigt werden. Seien $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ Regeln, und gelte $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{q}_1$, wobei $\boldsymbol{p}_j \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_j$ für $j \in \{0, 1\}$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$ gilt. Wir müssen Faktorisierungen $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_0 \boldsymbol{t}_0$ und $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{t}_1$ konstruieren so, daß aus $a \, I \, \boldsymbol{p}_j$ auch $a \, I \, \boldsymbol{s}_j$ folgt, und analog aus $a \, I \, \boldsymbol{q}_j$ auch $a \, I \, \boldsymbol{t}_j$ folgt ($a \in \Sigma$,

[8] Wie üblich schreiben wir π_i anstatt π_{Σ_i} für die Projektion auf die i–te Clique.

$j \in \{0,1\}$). Es ist zu beachten, daß für beliebige Spuren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ aus $\boldsymbol{u}\, I\, \boldsymbol{v}$ entweder $\pi_i(\boldsymbol{u}) = 1$ oder $\pi_i(\boldsymbol{v}) = 1$ für jede Clique Σ_i folgt[9]. Also muß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau einer der folgenden zwei Fälle gelten, wobei $\pi_i(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0) = \pi_i(\boldsymbol{\ell}_0) \neq 1 \neq \pi_i(\boldsymbol{\ell}_1) = \pi_i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1)$ zu beachten ist:

- Fall 1: $\pi_i(\boldsymbol{p}_0) \neq 1 \neq \pi_i(\boldsymbol{q}_1)$ und $\pi_i(\boldsymbol{p}_1) = 1 = \pi_i(\boldsymbol{q}_0)$
- Fall 2: $\pi_i(\boldsymbol{p}_1) \neq 1 \neq \pi_i(\boldsymbol{q}_0)$ und $\pi_i(\boldsymbol{p}_0) = 1 = \pi_i(\boldsymbol{q}_1)$

Wir definieren nun für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Faktorisierung $\pi_i(\boldsymbol{r}_0) = u_i v_i$ des Wortes $\pi_i(\boldsymbol{r}_0)$ folgendermaßen:

- $u_i = \pi_i(\boldsymbol{r}_0)$ und $v_i = 1$ falls Fall 1 für i gilt.
- $u_i = 1$ und $v_i = \pi_i(\boldsymbol{r}_0)$ falls Fall 2 für i gilt.

Wir behaupten, daß die Tupel $(u_1, \ldots, u_n)$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ rekonstruierbar sind. Nach Lemma 2.1.2 genügt es zu zeigen, daß $\pi_i(u_j) = \pi_j(u_i)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt. Seien also $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Falls i und j beide Fall 1 oder i und j beide Fall 2 erfüllen, ist dies offensichtlich. O.B.d.A. können wir annehmen, daß i den Fall 1 erfüllt, und j den Fall 2 erfüllt. Es folgt $u_i = \pi_i(\boldsymbol{r}_0)$ und $u_j = 1$ sowie

$$\begin{aligned} \pi_i(\boldsymbol{p}_0) &\neq 1 \neq \pi_i(\boldsymbol{q}_1), & \pi_i(\boldsymbol{p}_1) &= 1 = \pi_i(\boldsymbol{q}_0), \\ \pi_j(\boldsymbol{p}_1) &\neq 1 \neq \pi_j(\boldsymbol{q}_0), & \pi_j(\boldsymbol{p}_0) &= 1 = \pi_j(\boldsymbol{q}_1). \end{aligned}$$

Es folgt $\pi_i(\pi_j(\boldsymbol{\ell}_0)) = \pi_i(\pi_j(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0)) = 1$ und $\pi_i(\pi_j(\boldsymbol{\ell}_1)) = \pi_i(\pi_j(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1)) = 1$. Bedingung (1) für $\mathcal{R}$ aus dem Korollar impliziert daher $\pi_i(\pi_j(\boldsymbol{r}_0)) = 1 = \pi_i(\pi_j(\boldsymbol{r}_1))$. Es folgt $\pi_i(u_j) = \pi_i(1) = 1 = \pi_j(\pi_i(\boldsymbol{r}_0)) = \pi_j(u_i)$. Somit ist gezeigt, daß die Tupel $(u_1, \ldots, u_n)$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ rekonstruierbar sind. Also existieren eindeutig bestimmte Spuren $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{t}_0$ mit $\pi_i(\boldsymbol{s}_0) = u_i$ und $\pi_i(\boldsymbol{t}_0) = v_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus Lemma 2.1.1 folgt $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}_0$.

Gelte nun $a\, I\, \boldsymbol{p}_0$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a \in \Sigma_j$ gilt also $\pi_j(\boldsymbol{p}_0) = 1$, d.h. j erfüllt den Fall 2. Die Konstruktion von $(u_1, \ldots, u_n)$ impliziert somit $u_j = 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a \in \Sigma_j$. Es folgt $a\, I\, \boldsymbol{s}_0$, da sonst eine Clique Σ_j mit $a \in \Sigma_j$ und $\pi_j(\boldsymbol{s}_0) = u_j \neq 1$ existieren würde. Analog kann gezeigt werden, daß aus $a\, I\, \boldsymbol{q}_0$ auch $a\, I\, \boldsymbol{t}_0$ folgt. Wir haben somit die gewünschte

[9] Würde für die i–te Clique etwa $\pi_i(\boldsymbol{u}) \neq 1 \neq \pi_i(\boldsymbol{v})$ gelten, so würden $a, b \in \Sigma_i$ mit $a \in \mathit{alph}(\boldsymbol{u})$ und $b \in \mathit{alph}(\boldsymbol{v})$ existieren. Aus $a, b \in \Sigma_i$ folgt aber $(a, b) \notin I$, was $\boldsymbol{u}\, I\, \boldsymbol{v}$ widerspricht.

Faktorisierung von $\boldsymbol{r}_0$ konstruiert. Die gewünschte Faktorisierung $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}_1$ von $\boldsymbol{r}_1$ kann völlig analog konstruiert werden. Das SES $\mathcal{R}$ erfüllt somit die Bedingung (A).

Es muß nun noch die zweite Bedingung aus Satz 6.3.2 gezeigt werden. Seien $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ Regeln, und seien $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1$ Faktorisierungen mit $\boldsymbol{p}_0\, I\, \boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{q}_0\, I\, \boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{s} \neq 1$. Sei $\Gamma = D(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_1) \cap D(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{s}\boldsymbol{q}_0)$. Wegen $\boldsymbol{s} \neq 1$ existiert eine Clique Σ_i mit $\Sigma_i \subseteq D(\boldsymbol{s}) \subseteq \Gamma$. Da $\pi_i(\mathcal{R})$ terminierend ist, muß auch $\pi_\Gamma(\mathcal{R})$ terminierend sein. Insbesondere ist $\pi_\Gamma(\mathcal{R})$ terminierend auf den Spuren $\pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{q}_0)$ und $\pi_\Gamma(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{q}_1)$. Der Beweis des Korollars ist somit vollständig. $\square$

Beispiel 6.3.4. Sei $\mathcal{R}$ ein SES über einem direkten Produkt $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ von freien Monoiden. Ist jedes der Semi–Thue Systeme $\pi_{\Sigma_i}(\mathcal{R})$ terminierend ($i \in \{1, \ldots, n\}$), so ist es nach Korollar 6.3.3 entscheidbar, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\mathcal{R}$ in jeder der n Komponenten längenreduzierend ist. Andererseits ist Konfluenz schon für Spurersetzungssysteme über $\{a, b\}^* \times \{c\}^*$, für die alle Regeln in einer Komponente längenerhaltend und in der anderen Komponente längenreduzierend sind, unentscheidbar, siehe die Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 3.3.4. Dies ergibt eine sehr scharfe Grenze zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit für den Fall direkter Produkte von freien Monoiden. Es sollte weiter beachtet werden, daß nicht jedes SES über einem direkten Produkt von freien Monoiden, welches in jeder Komponente längenreduzierend ist, auch gleichzeitig die Bedingung (C) aus Abschnitt 5.2 erfüllt. Sei z.B. $\mathcal{R}$ das SES $\{(a, bb) \to (1, b)\}$ über dem direkten Produkt $\{a\}^* \times \{b, c\}^*$. Betrachten wir die zwei Faktorisierungen $(1, bb)(a, 1)(1, 1) = (1, 1)(a, 1)(1, bb)$ der linken Seite (a, bb). Wegen $c\, I\, a$ und $bc \neq cb$ erfüllt $\mathcal{R}$ nicht die Bedingung (C1). Insofern ist also Satz 6.3.2 kein Spezialfall von Satz 5.2.1. Umgekehrt ist es einfach ein löschendes SES anzugeben, welches nicht die Bedingungen in Satz 6.3.2 erfüllt. Dies ist z.B. für das SES $\{a \to 1, b \to 1\}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$ der Fall.

Das folgende Korollar macht eine zu Korollar 6.3.3 ähnliche Aussage.

Korollar 6.3.5. Das folgende Problem ist entscheidbar:
EINGABE: Ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Alle $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{R})$ sind zusammenhängend.

(2) Es existiert eine Cliquenüberdeckung $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma) \backslash I)$ so, daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ das Semi–Thue System $\pi_i(\mathcal{R})$ terminierend ist.

FRAGE: Ist $\mathcal{R}$ konfluent?

Beweis. Der Beweis benutzt ähnliche Argumente wie der Beweis von Korollar 6.3.3. Sei $\mathcal{R}$ ein SES, welches die Bedingungen (1) und (2) aus dem Korollar erfüllt. Sei also $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ eine Cliquenüberdeckung des Abhängigkeitsalphabets $(\Sigma, (\Sigma \times \Sigma) \backslash I)$ so, daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ das Semi–Thue System $\pi_i(\mathcal{R})$ terminierend ist. Also muß $\mathcal{R}$ wieder terminierend sein. Wie im Beweis von Korollar 6.3.3 ergibt sich, daß $\mathcal{R}$ die zweite Bedingung aus Satz 6.3.2 erfüllt. Außerdem muß wieder $\pi_i(\boldsymbol{\ell}) \neq 1$ für alle $\boldsymbol{\ell} \in dom(\mathcal{R})$ und alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten. Somit erfüllt $\mathcal{R}$ auch die Bedingung (A1). Es muß also noch gezeigt werden, daß $\mathcal{R}$ die Bedingung (A2) erfüllt. Angenommen es existieren zwei Regeln $(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{r}_0), (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{r}_1) \in \mathcal{R}$ und Faktorisierungen $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\ell}_1 = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1$ mit $\boldsymbol{p}_i \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_i$ für $i \in \{0, 1\}$, $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$. Wir werden einen Widerspruch ableiten. Angenommen es gilt $\pi_i(\boldsymbol{p}_0) \neq 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{p}_1$ folgt $\pi_i(\boldsymbol{p}_1) = 1$. Wegen $\pi_i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1) = \pi_i(\boldsymbol{\ell}_1) \neq 1$ folgt $\pi_i(\boldsymbol{q}_1) \neq 1$, was wiederum wegen $\boldsymbol{q}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_1$ auch $\pi_i(\boldsymbol{q}_0) = 1$ zur Folge hat. Also gilt $\pi_i(\boldsymbol{q}_0) = 1$, falls $\pi_i(\boldsymbol{p}_0) \neq 1$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Es folgt $\boldsymbol{p}_0 \, I \, \boldsymbol{q}_0$, denn andernfalls würde eine Clique Σ_j mit $\pi_j(\boldsymbol{p}_0) \neq 1 \neq \pi_j(\boldsymbol{q}_0)$ existieren. Wegen $\boldsymbol{p}_0 \neq 1 \neq \boldsymbol{q}_0$ widerspricht dies aber der Annahme, daß $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0$ zusammenhängend ist. □

Beispiel 6.3.6. Sei $\mathcal{R}$ das monadische SES $\{bdc \to a\}$ über dem Spurmonoid $\mathbb{M}(\{a, b, c, d\}, \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\})$. Das zugehörige Abhängigkeitsalphabet ist der folgende 4er–Zyklus:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] c \arrow[r] \arrow[d] & d \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

Die zugehörige Cliquenüberdeckung lautet $(\{a, b\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c\})$. Die Spur bdc ist zusammenhängend, und die Projektion der Regel $bdc \to a$ auf jede der vier Cliquen ist terminierend. Also können wir nach Korollar 6.3.5 entscheiden, ob $\mathcal{R}$ konfluent ist[10]. Es ist zu beachten, daß wir hierzu nicht Korollar 6.3.3 anwenden können, da $\pi_{\{a,b\}}(\pi_{\{a,c\}}(bdc)) = 1$ und $\pi_{\{a,b\}}(\pi_{\{a,c\}}(a)) \neq 1$ gilt. Andererseits kann Korollar 6.3.5 im allgemeinen nicht auf die in Beispiel

[10] Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{R}$ konfluent ist.

6.3.4 betrachteten Spurersetzungssysteme über direkten Produkten von freien Monoiden angewendet werden.

6.4 Die Theorie der Einschrittersetzungsrelation

Satz 6.2.9 besagt, daß für gewisse logische Sätze 1. Stufe, deren einziges nicht–logisches Symbol die Einschrittersetzungsrelation $\to_{\mathcal{R}}$ eines SES $\mathcal{R}$ ist, die Gültigkeit in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ entscheidbar ist. Es stellt sich nun die Frage, ob Satz 6.2.9 weiter verallgemeinert werden kann. Hierzu bezeichnen wir für ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ mit $\mathit{Th}(\mathbb{M}(\Sigma, I), \to_{\mathcal{R}})$ die Menge aller in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ gültigen Variablen–freien Formeln 1. Stufe, deren atomare Teilformeln alle von der Gestalt $x \to_{\mathcal{R}} y$ sind, wobei $x, y \in \mathit{Var}$ gilt. Es stellt sich also die Frage, ob $\mathit{Th}(\mathbb{M}(\Sigma, I), \to_{\mathcal{R}})$ für ein gegebenes Unabhängigkeitsalphabet (Σ, I) und ein SES $\mathcal{R}$ über $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ entscheidbar ist. Diese Frage kann leider in dieser Arbeit nicht allgemein beantwortet werden.

Für andere Typen von Ersetzungssystemen wurde das Problem der Entscheidbarkeit der Theorie der Einschrittersetzungsrelation eingehend studiert. Es ist z.B. bekannt, daß für Termersetzungssysteme diese Theorie im allgemeinen unentscheidbar ist [Tre96]. Für Semi–Thue Systeme ist jedoch die Theorie der Einschrittersetzungsrelation entscheidbar [Jac96, DT90]. Der Beweis für die Entscheidbarkeit von $\mathit{Th}(\Sigma^*, \to_{\mathcal{R}})$ basiert auf den effektiven Abschlußeigenschaften und Entscheidbarkeitseigenschaften von synchronisierten rationalen Transduktionen [FS93]. Es scheint jedoch nicht klar zu sein, ob dieser Typ von Transduktionen auf geeignete Weise auf Spurmonoide erweitert werden kann. Da jedoch aus dem Entscheidbarkeitsbeweis für Semi–Thue Systeme folgt, daß auch die Theorie $\mathit{Th}(\Sigma^*, \to_{\mathcal{R}_1}, \ldots, \to_{\mathcal{R}_n})$ mehrerer Einschrittersetzungsrelationen entscheidbar ist, ergibt sich zumindestens das folgende Resultat:

Satz 6.4.1. Ist $M = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ ein direktes Produkt von freien Monoiden, und ist $\mathcal{R}$ ein SES über M, so ist $\mathit{Th}(M, \to_{\mathcal{R}})$ entscheidbar.

Beweis. Seien $M = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$ und $\mathcal{R}$ wie im Satz beschrieben. Wir können natürlich davon ausgehen, daß $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt. Sei φ eine Formel, deren atomare Teilformeln alle von der Form $x \to_{\mathcal{R}} y$ für Variablen x und y sind. Zunächst ersetzen wir jede solche atomare Teilformel $x \to_{\mathcal{R}} y$ durch

$\bigvee_{(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{r})\in\mathcal{R}} x \rightarrow_{(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{r})} y$. Für jede Variable x seien $x_1, \ldots, x_n$ neue Variablen. Wir ersetzen nun jede Quantifizierung $\exists x$ durch $\exists x_1 \in \Sigma_1^*, \ldots, \exists x_n \in \Sigma_n^*$. Außerdem ersetzen wir jede atomare Teilformel $x \rightarrow_{(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{r})} y$, wobei $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ und $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ gelte, durch die Konjunktion $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \rightarrow_{(\ell_i,r_i)} y_i$. Indem wir für jedes Alphabet Σ_i das Semi–Thue System $\mathcal{R}_i = \{a \rightarrow a \mid a \in \Sigma_i\}$ definieren, können wir schließlich eine beschränkte Quantifizierung $\exists x_i \in \Sigma_i^* : \phi$ durch $\exists x_i : \phi \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg(x_i \rightarrow_{\mathcal{R}_j} x_i)$ ersetzen. Sei φ' die so resultierende Formel. Hat nun φ keine freien Variablen, so ist es einfach zu sehen, daß φ in M genau dann gültig ist, wenn φ' in $(\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i)^*$ gültig ist, was entscheidbar ist. $\square$

Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir das Konfluenzproblem für Spurersetzungssysteme untersucht. Unsere Analyse hat sich auf die drei Teilklassen der längenreduzierenden, monadischen und löschenden Ersetzungssysteme konzentriert. Für jede dieser drei Teilklassen haben wir das Konfluenzproblem in Abhängigkeit von dem zugrundeliegenden Spurmonoid untersucht. Schließlich haben wir noch den nach dem Kenntnisstand des Autors neuen Begriff der (α, β)–Konfluenz für Spurersetzungssysteme untersucht und Anwendungen auf das Konfluenzproblem präsentiert. Aus diesen Untersuchungen haben sich eine Reihe von Fragen ergeben, die in dieser Arbeit nicht gelöst werden konnten. Abschließend möchte ich einige der Fragen, die mir als besonders interessant erscheinen, zusammenfassen.

In Abschnitt 3.3 konnte gezeigt werden, daß Konfluenz für längenreduzierende System unentscheidbar ist, falls das zugrundeliegende Spurmonoid weder frei noch frei kommutativ ist. Andererseits konnte in Abschnitt 5.2 gezeigt werden, daß Konfluenz für löschende Spurersetzungssysteme entscheidbar ist. Zwischen der Klasse der längenreduzierenden Systeme und der Klasse der löschenden Systeme befindet sich die Klasse der monadischen Spurersetzungssysteme. Für eine genauere Lokalisierung der Grenze zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit für das Konfluenzproblem für Spurersetzungssystem ist also der noch ungelöste monadische Fall besonders interessant.

In Abschnitt 6.2 konnte für eine Klasse von logischen Formeln 1. Stufe über der Einschrittersetzungsrelation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ gezeigt werden, daß die Gültigkeit in einem Spurmonoid entscheidbar ist. Dies motiviert natürlich die Frage nach der Entscheidbarkeit der vollen logischen Theorie 1. Stufe der Einschrittersetzungsrelation $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ eines SES. Für direkte Produkte von freien Monoiden ist diese Theorie in der Tat entscheidbar. Auf der anderen Seite motiviert die Unentscheidbarkeit der logischen Theorie 1. Stufe der Einschrittersetzungsrelation eines Termersetzungssystems [Tre96] die Untersuchung von Formeltypen von der in Abschnitt 6.2 betrachteten Form für Termersetzungssysteme. Es könnte z.B. eine interessante Frage sein, ob (α, β)–Konfluenz für Termersetzungssysteme entscheidbar ist.

Eine in dieser Arbeit nicht betrachtete Klasse von Spurersetzungssystemen sind Systeme mit nur einer Regel. Es ist bekannt, daß ein Semi–Thue System mit nur einer Regel genau dann konfluent ist, wenn es stark konfluent ist, weshalb es entscheidbar ist ob ein Semi–Thue System mit nur einer Regel konfluent ist [Wra92]. Für Spurersetzungssysteme ist dies nicht mehr der Fall [Ott95]. In [WD95] konnte eine Teilklasse von Ein–Regel Spurersetzungssystemen angegeben werden, für die Konfluenz entscheidbar ist. Der allgemeine Fall ist jedoch weiterhin offen. Insbesondere ist es nicht bekannt, ob Konfluenz für eine Regel der Form $1 \to \boldsymbol{r}$ entscheidbar ist.

Literaturverzeichnis

[BD95] M. Bertol and V. Diekert. On efficient reduction-algorithms for some trace rewriting systems. In H. Common and J.-P. Jouannaud, editors, *Term Rewriting.*, number 909 in Lecture Notes in Computer Science, pages 114–126, Berlin-Heidelberg-New York, 1995. Springer.

[BD96] M. Bertol and V. Diekert. Trace rewriting: Computing normal forms in time $\mathcal{O}(n \log n)$. In C. Puech and R. Reischuk, editors, *Proceedings of the13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science 1996*, number 1046 in Lecture Notes in Computer Science, pages 269–280, Berlin-Heidelberg-New York, 1996. Springer.

[Ber79] J. Berstel. *Transductions and context–free languages.* Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1979.

[Ber95] M. Bertol. Efficient rewriting in cograph trace monoids. In H. Reichel, editor, *Proceedings of the10th Fundamentals of Computation Theory (FCT '95), Dresden (Germany) 1995*, number 965 in Lecture Notes in Computer Science, pages 146–155, Berlin-Heidelberg-New York, 1995. Springer.

[Ber96] M. Bertol. *Effiziente Normalform–Algorithmen für Ersetzungssysteme über partiell kommutativen Monoiden.* PhD thesis, Universität Stuttgart, 1996.

[BJW82] R.V. Book, M. Jantzen, and C. Wrathall. Monadic Thue systems. *Theoretical Computer Science*, 19:231–251, 1982.

[BL81] A. M. Ballantyne and D. S. Lankford. New decision algorithms for finitely presented commutative semigroups. *Comput. and Maths. with Appls.*, 7:159–165, 1981.

[BMS89] A. Bertoni, G. Mauri, and N. Sabadini. Membership problems for regular and context free trace languages. *Information and Computation*, 82:135–150, 1989.

[BO81] R.V. Book and C.P. O'Dunlaing. Testing for the Church–Rosser property (note). *Theoretical Computer Science*, 16:223–229, 1981.

[BO84] G. Bauer and F. Otto. Finite complete rewriting systems and the complexity of the word problem. *Acta Informatica*, 21:521–540, 1984.

[BO85] R.V. Book and F. Otto. Cancellation rules and extended word problems. *Information Processing Letters*, 20:5–11, 1985.

[BO93] R.V. Book and F. Otto. *String–Rewriting Systems.* Springer, 1993.

[Boo82] R.V. Book. Confluent and other types of Thue systems. *Journal of the ACM*, 29(1):171–182, January 1982.

[BS90] R.P. Boppana and M. Sipser. The complexity of finite functions. In Jan van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science (Volume A: Algorithms and Complexity).* Elsevier and MIT Press, 1990.

[CF69] P. Cartier and D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* Number 85 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[CM85] R. Cori and Y. Métivier. Recognizable subsets of some partially abelian monoids. *Theoretical Computer Science*, 35:179–189, 1985.

[CP85] R. Cori and D. Perrin. Automates et commutations partielles. *R.A.I.R.O. — Informatique Théorique et Applications*, 19:21–32, 1985.

[Dic13] L. E. Dickson. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with r distinct prime factors. *Amer. Journal Math.*, 35:413–422, 1913.

[Die87] V. Diekert. On the Knuth-Bendix completion for concurrent processes. In Th. Ottmann, editor, *Proceedings of the14th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'87), Karlsruhe (FRG) 1987*, number 267 in Lecture Notes in Computer Science, pages 42–53, Berlin-Heidelberg-New York, 1987. Springer.

[Die90a] V. Diekert. Combinatorial rewriting on traces. In C. Choffrut et al., editors, *Proceedings of the7th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'90), Rouen (France) 1990*, number 415 in Lecture Notes in Computer Science, pages 138–151, Berlin-Heidelberg-New York, 1990. Springer.

[Die90b] V. Diekert. *Combinatorics on Traces.* Number 454 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[Die90c] V. Diekert. Word problems over traces which are solvable in linear time. *Theoretical Computer Science*, 74:3–18, 1990.

[Die97] V. Diekert. A remark on trace equations. In Ch. Freksa, M. Jantzen, and R. Valk, editors, *Foundations of Computer Science*, number 1337 in Lecture Notes in Computer Science, pages 251–260. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[DMM97] V. Diekert, Y. Matiyasevich, and A. Muscholl. Solving trace equations using lexicographical normal forms. In P. Degano, R. Gorrieri, and A. Marchetti-Spaccamela, editors, *Proceedings of the24th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'97), Bologna (Italy) 1997*, number 1256 in Lecture Notes in Computer Science, pages 336–347, Berlin-Heidelberg-New York, 1997. Springer.

[DR95] V. Diekert and G. Rozenberg, editors. *The Book of Traces.* World Scientific, Singapore, 1995.

[DT90] M. Dauchet and S. Tison. The theory of ground rewrite systems is decidable. In *Proceedings of the5th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS '90)*, pages 242–256. IEEE Computer Society Press, 1990.

[Dub86a] Ch. Duboc. Mixed procuct and asynchronous automata. *Theoretical Computer Science*, 48:183–199, 1986.

[Dub86b] Ch. Duboc. On some equations in free partially commutative monoids. *Theoretical Computer Science*, 46:159–174, 1986.

[Eil74] S. Eilenberg. *Automata, Languages, and Machines*, volume A. Academic Press, New York and London, 1974.

[EJ89] D. Frutos Escrig and C. Johnen. Decidability of home space property. Technical Report LRI–503, Laboratoire de Recherche en Informatique, Univ. de Paris–Sud, Centre d'Orsay, 1989.

[Esp97] J. Esparza. Petri nets, commutative context–free grammars, and basic parallel processes. *Fundamenta Informatica*, 30:23–41, 1997.

[FS93] C. Frougny and J. Sakarovitch. Synchronized rational relations of finite and infinite words. *Theoretical Computer Science*, 108(1):45–82, 1993.

[GHR95] R. Greenlaw, H. J. Hoover, and W. L. Ruzzo. *Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory*. Oxford University Press, 1995.

[GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP–completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.

[HL78] G. Huet and D. Lankford. On the uniform halting problem for term rewriting systems. Report Lab. Report No. 283, INRIA, Le Chesnay, France, 1978.

[HU70] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages and computation*. Addison–Wesley, Reading, MA, 1970.

[Huy83] D. T. Huynh. Commutative grammars: The complexity of uniform word problems. *Information and Control*, 57:21–39, 1983.

[Huy85] D. T. Huynh. Complexity of the word problem for commutative semigroups of fixed dimension. *Acta Informatica*, 22:421–432, 1985.

[Jac96] Florent Jacquemard. *Automates d'arbres et Réécriture de termes.* PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1996. In French.

[Jan88] M. Jantzen. Confluent string rewriting. In *EATCS Monographs on theoretical computer science*, volume 14. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[JLL77] N. D. Jones, L. H. Landweber, and Y. E. Lien. Complexity of some problems in Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 4:277–299, 1977.

[Kar72] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[KKMN85] D. Kapur, M. S. Krishnamoorthy, R. McNaughton, and P. Narendran. An $O(|T|^3)$ algorithm for testing the Church-Rosser property of Thue systems. *Theoretical Computer Science*, 35(1):109–114, January 1985.

[Klo90] J.W. Klop. Term rewriting systems. In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science.* Oxford University Press, Oxford, 1990.

[Kos82] S. R. Kosaraju. Decidability of reachability in vector addition systems. In *14th Annual Symposium on Theory of Computing*, pages 267–281. ACM Press, 1982.

[Loh98] M. Lohrey. On the confluence of trace rewriting systems. In V. Arvind and R. Ramanujam, editors, *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, volume 1530 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–330. Springer, 1998.

[Lot83] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.

[Mat97] Y. Matiyasevich. Some decision problems for traces. In S. Adian and A. Nerode, editors, *Proceedings of the 4th International Symposium on Logical Foundations of Computer Science (LFCS'97), Yaroslavl, Russia, July 6–12, 1997*, number 1234 in Lecture Notes in Computer Science, pages 248–257, Berlin-Heidelberg-New York, 1997. Springer.

[May84] E. W. Mayr. An algorithm for the general Petri net reachability problem. *SIAM Journal on Computing*, 13:441–460, 1984.

[Maz77] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. DAIMI Rep. PB 78, Aarhus University, Aarhus, 1977.

[MM82] E. W. Mayr and A. R. Meyer. The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals. *Advances in Math.*, 46:305–329, 1982.

[NB72] M. Nivat and M. Benois. Congruences parfaites et quasi–parfaites. *Seminaire Dubreil*, 25(7–01–09), 1971–1972.

[New43] M. H. A. Newman. On theories with a combinatorial definition of "equivalence". *Annals Mathematics*, 43:223–243, 1943.

[NO88] P. Narendran and F. Otto. Preperfectness is undecidable for Thue systems containing only length-reducing rules and a single commutation rule. *Information Processing Letters*, 29:125–130, 1988.

[Och85] E. Ochmański. Regular behaviour of concurrent systems. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, 27:56–67, October 1985.

[Ott89] F. Otto. On deciding confluence of finite string rewriting systems modulo partial commutativity. *Theoretical Computer Science*, 67:19–36, 1989.

[Ott95] F. Otto. On confluence versus strong confluence for one-rule trace-rewriting systems. *Mathematical Systems Theory*, 28:363–384, 1995.

[Pap94] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison Wesley, 1994.

[Rei85] W. Reisig. *Petri Nets (an Introduction)*. Number 4 in EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[Ruz80] W. L. Ruzzo. Tree–size bounded alternation. *Journal of Computer and System Sciences*, 21:218–235, 1980.

[RY86] L. E. Rosier and H. C. Yen. A multiparameter analysis of the boundedness problem for vector addition systems. *Journal of Computer and System Sciences*, 32(1):105–135, 1986.

[Thu14] A. Thue. Probleme über die Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln. *Skr. Vid. Kristiania, I Math. Natuv. Klasse*, No. 10, 34 S., 1914.

[Tre96] R. Treinen. The first–order theory of one-step rewriting is undecidable. In H. Ganzinger, editor, *7th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, number 1103 in Lecture Notes in Computer Science, pages 276–286, New Brunswick, NJ, USA, 1996. Springer.

[VRL98] R. M. Verma, M. Rusinowitch, and D. Lugiez. Algorithms and reductions for rewriting problems. In *Proceedings 9th Conference on Rewriting Techniques and Applications, Tsukuba (Japan)*, volume 1379 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 166–180. Springer, 1998.

[WD95] C. Wrathall and V. Diekert. On confluence of one-rule trace-rewriting systems. *Mathematical Systems Theory*, 28:341–361, 1995.

[Wra92] C. Wrathall. Confluence of one–rule Thue systems. In K. U. Schulz, editor, *Word Equations and Related Topics*, number 572 in Lecture Notes in Computer Science, pages 237–246. Springer, 1992.

Index