Einige approximative Lösungen von Rekursionsgleichungen die bei rekursiven Algorithmen häufig auftreten*

Michael Bertol
Normannenweg 48, 88090 Immenstaad a.B.
e-mail bertolinformatik.uni-stuttgart.de

17. Mai 1996

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die bei Komplexitätsabschätzungen von Algorithmen sehr häufgig auftretende Rekursionsgleichung analysiert. Dabei werden analytische Standard-Methoden entwickelt um approximative Aussagen zu erhalten.

Keywords: Rekursionsgleichung, Komplexität von rekursiven Algorithmen.

1 Motivation

Viele der modernen Programmiersprachen beinhalten Rekursion als zentrales Konzept. Deshalb ist es von zentralem interesse rekursiven Aufwand beispielsweise der Resourcen Platz oder Zeit abschätzen zu können. Die dazu traditionellen Lösungsmethoden dieser kombinatorischen Probleme sind rekursives Unfolding, Induktionsbeweise und „Formale-Potenzreihen"-Algebra. In dieser Arbeit stellen wir eine analytische Methode zur Berechnung bzw. Verfeinerung einiger Rekursionsgleichungen vor.

2 Der Tail-Recursion Typ

Beginnen wir mit einer Definition der einfachen additiven linearen Rekursionsgleichung.

*Diese Arbeit wurde durch die Universität Stuttgart, Institut für Informatik Breitwiesenstraße 20/22, D-70565 Stuttgart unterstützt.

Definition 1 (Rekursionsgleichung)

$$\begin{array}{rcllr} A(0) & = & b & & a,b \in \mathbb{C} \\ A(n) & = & a \cdot A(n-c) + f(n) & (n \in c\mathbb{N}^+) & c > 0, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}$$

Theorem 1 (Exakte Lösung) *Sei $f(0) = b$, dann gilt*

$$A(n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n/c} a^i f(n-ic)$$

Beweis: Sei $n = jc$.

$$\begin{array}{rcl} A(n) & = & aA(n-c) + f(n) \\ & = & a(aA(n-2c) + f(n-c)) + f(n) \\ & = & a^2 A(n-2c) + af(n-c) + f(n) \\ \dots & = & a^j A(n-jc) + \sum_{i=0}^{j-1} a^i f(n-ic) \quad (\text{ mit } j = \frac{n}{c}) \\ & = & ba^{n/c} + \sum_{i=0}^{n/c-1} a^i f(n-ic) \\ & = & \sum_{i=0}^{n/c} a^i f(n-ic) \end{array}$$

■

Bemerkung 1 *Die Lösung kann als Faltung von $g(i) = a^i$ und $h(i) = f(ic)$ interpretiert werden $A(n) = \sum_i g(i)h(n-i) \cong \sum_j g(n-j)h(j)$, was in Spezialfällen hilfreich sein kann.*

3 Der Divide-And-Concur Typ

Der zweite Typ, den wir betrachten ist eine lineare multiplikative Rekursionsgleichung. Hier wieder die Definition.

Definition 2 (Rekursionsgleichung)

$$\begin{array}{rcllr} M(1) & = & b & & a,b \in \mathbb{C} \\ M(n) & = & a \cdot M(\frac{n}{c}) + f(n) & (n \in c\mathbb{N}^+) & a \geq 1, c > 1, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}$$

Definition 3 (multiplikativ) *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt* multiplikativ *(auf $X \subseteq \mathbb{C}$), falls $\forall n, m \in X \;\; f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$.*

Fortan sagen wir f ist multiplikativ, wenn f für alle im Kontext auftretenden Werte multiplikativ ist.

Theorem 2 (Exakte Lösung für multiplikative f) *Sei f multiplikativ, $q = \log_a c$, dann gilt*

- $M(n) = bn^q + f(c)\frac{f(n)-n^q}{f(c)-a}$, *falls $f(c) \neq a$ und*
- $M(n) = bn^q + f(n)\log_c n$, *falls $f(c) = a$.*

Beweis: Sei $n = c^j$.

$$
\begin{aligned}
M(n) &= aM(\frac{n}{c}) + f(n) \\
&= a(aM(\frac{n}{c^2}) + f(\frac{n}{c})) + f(n) \\
&= a^2M(\frac{n}{c^2}) + af(\frac{n}{c}) + f(n) \\
\ldots &= a^jM(\frac{n}{c^j}) + \sum_{i=0}^{j-1} a^i f(\frac{n}{c^i}) \quad (\text{ mit } j = \log_c n) \\
&= a^{\log_c n}M(1) + f(n)\sum_{i=0}^{\log_c n - 1}\left(\frac{a}{f(c)}\right)^i
\end{aligned}
$$

Für $a \neq f(c)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M(n) &= a^{\log_c n}b + f(n)\frac{1-(a/f(c))^{\log_c n}}{1-a/f(c)} \quad (a \neq f(c)) \\
&= n^{\log_a c}b + f(c)\frac{f(n)-n^{\log_a c}}{f(c)-a}
\end{aligned}
$$

und für $a = f(c)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M(n) &= a^{\log_c n}b + f(n)\sum_{i=0}^{\log_c n - 1} 1 \\
&= n^{\log_a c}b + f(n)\log_c n
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lemma 1 (Summationslemma) *Sei $g > 0$ monoton fallend und $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(d^i)$ konvergent für ein $d > 1$. Dann ist auch $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(c^i)$ für alle $c > 1$ konvergent.*

Beweis:

$$
c \geq d \Longrightarrow g(c^i) \leq g(d^i) \Longrightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} g(c^i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} g(d^i)
$$

$$
\begin{aligned}
1 < c < d &\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \in \mathbb{N}\ \ d^j \leq c^k \leq d^{j+1} \\
&\Longrightarrow j\log_c d \leq k \leq (j+1)\log_c d \\
&\Longrightarrow \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} g(c^i) \leq (\log_c d + 1)\sum_{i\in\mathbb{N}} g(d^i)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Aus dieser Beobachtung und der exakten Lösung für M erhalten wir das erste Lemma.

Lemma 2 (Approximative Lösung I) *Sei $g > 0$ monoton fallend und $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(d^i)$ konvergent für ein $d > 1$ und $q = \log_c a$. Dann gilt*

$$f(n) = \Theta(n^q g(n)) \quad \Longrightarrow \quad M(n) = \Theta(n^q).$$

Beweis: Sei $n = c^j$.

$$M(n) \;=\; a^j M(\frac{n}{c^j}) + \sum_{i=0}^{j-1} a^i f(\frac{n}{c^i})$$

Mit $j = \log_c n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
M(n) &= a^{\log_c n} M(1) + \sum_{i=0}^{\log_c n-1} a^i f(\frac{n}{c^i}) \\
&= n^{\log_a c} b + \sum_{i=0}^{\log_c n-1} a^i \Theta\Big((\frac{n}{c^i})^q g(\frac{n}{c^i})\Big) \\
&= n^q b + \Theta\Big(n^q \sum_{i=0}^{\log_c n-1} (\frac{a}{c^q})^i g(\frac{n}{c^i})\Big) \\
&= n^q b + \Theta\Big(n^q \sum_{i=0}^{\log_c n-1} g(c^{\log_a n - i})\Big) \\
&= n^q b + \Theta\Big(n^q \sum_{i=1}^{\log_c n} g(c^i)\Big) \le n^q(b+K) \quad \Longrightarrow M(n) = \Theta(n^q)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2 *Sei $g > 0$ monoton fallend und $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(d^i)$ konvergent für ein $d > 1$ und $q = \log_c a$. Dann gilt $f(n) = \mathcal{O}(n^q g(n)) \Longrightarrow M(n) = \Theta(n^q)$, falls $b > 0$. Ansonsten gilt nur $M(n) = \mathcal{O}(n^q)$.*

Korollar 1 *Sei $f(n) = \Theta\Big(n^q \frac{1}{(\log n)^{1+\epsilon}}\Big)$ mit $\epsilon > 0$, dann ist $M(n) = \Theta(n^q)$.*

Beweis: Setze $g(n) = \frac{1}{(\log n)^{1+\epsilon}}$. $g(n)$ fällt monoton und $\sum g(c^n) = \sum_{n\ge c} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ konvergiert. ■

Korollar 2 *Sei $f(n) = \Theta\Big(n^q \frac{1}{\log n(\log\log n)^{1+\epsilon}}\Big)$, dann ist $M(n) = \Theta(n^q)$.*

Beweis: Setze $g(n) = \frac{1}{\log n(\log\log n)^{1+\epsilon}}$. Wieder fällt $g(n)$ monoton und

$$\sum g(c^n) = \sum_{n\ge c} \frac{1}{n(\log n)^{1+\epsilon}} \le \sum_{n\ge c} \sum_{i=c^n}^{c^{n+1}-1} \frac{1}{c^n n^{1+\epsilon}} = \sum_{n\ge c} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \text{ konvergiert.}$$

■

Korollar 3 *Sei* $f(n) = \Theta\Big(n^q \frac{1}{\log n \log^{(2)} n \cdots \log^{(p-1)} n (\log^{(p)} n)^{1+\epsilon}}\Big)$ *mit* $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\log^{(1)} = \log$ *und* $\log^{(i)} = \log\log^{(i-1)}$ *(*$i > 1$*). Dann ist* $M(n) = \Theta(n^q)$*.*

Beweis: Setze $g_p(n) = \frac{1}{\log n \log^{(2)} n \cdots \log^{(p-1)} n (\log^{(p)} n)^{1+\epsilon}}$. Wieder fällt $g_p(n)$ monoton und

$$\begin{aligned}
\sum g_p(c^n) &= \sum_{n \geq c^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{c}}}}}} \frac{1}{n \log^{(1)} n \cdots \log^{(p-2)} n (\log^{(p-1)} n)^{1+\epsilon}} \\
&\leq \sum_{n \geq c^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{c}}}}}} \sum_{i=c^n}^{c^{n+1}-1} \frac{1}{c^n \log^{(1)} c^n \cdots \log^{(p-2)} c^n (\log^{(p-1)} c^n)^{1+\epsilon}} \\
&= \sum_{n \geq c^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{c}}}}}} \frac{1}{g_{p-1}(c^n)} \text{ konvergiert mit Induktion.}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3 *In den obigen Beweisen wurden ohne Einschränkung nur* n *ab einem gewissen* C *untersucht. Für* $1 < n \leq C$ *existieren die entsprechenden Grenzwerte von* $f(n)$*.*

Definition 4 *Eine monoton steigende Funktion* $g > 0$ *heißt* schwach wachsend, *falls*

$$\forall c > 1 \; g(cn) = \mathcal{O}(g(n))$$

Eine monoton fallende Funktion $g > 0$ *heißt* schwach fallend, *falls*

$$\forall c > 1 \; g(n) = \mathcal{O}(g(cn))$$

Eine monotone Funktion heißt schwach variierend, *falls sie schwach fallend oder schwach wachsend ist.*

Bemerkung 4 *Es genügt eine Beziehung für ein* $c > 1$ *zu zeigen, wenn man eine Funktion als schwach variierend identifizieren will.*

Bereits für monotone, insbesondere aber für schwach variierende Funktionen gilt für $0 \leq a < b$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\sum_{i=a}^{b} g(c^i) = \Theta\Big(\int_a^b g(c^x)dx\Big) \qquad \sum_{i=a}^{b} \frac{1}{g(c^i)} = \Theta\Big(\int_a^b \frac{1}{g(c^x)}dx\Big)$$

Damit erhalten wir eine Verbindung zur Analysis.

Lemma 3 (Approximative Lösung II) *Sei* $q = log_a c$, $f(n) = \Theta\Big(\frac{n^q}{g(n)}\Big)$, $g > 0$ *schwach variierend,* $\sum_{i \in \mathbb{N}} 1/g(c^i)$ *divergent und sei* $g(n) = o(\log n)$*. Sei* $h(x) = g(c^x)$ *und es gelte fast überall* $c \leq xh'/h \leq C$ *für Konstanten* c, C*. Dann gilt*

$$M(n) = \Theta(f(n) \log n)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
M(n) &= n^q\Big(M(1)+\Theta\Big(\sum_{i=1}^{\log_c n}\frac{1}{g(c^i)}\Big)\Big)\\
&= \Theta\Big(n^q\int_{i=1}^{\log_c n}\frac{1}{g(c^x)}dx\Big)\\
&= \Theta\Big(n^q\Big(\frac{x}{h(x)}\Big|_1^{\log_c n}+\int_{i=1}^{\log_c n}\frac{xh'(x)}{(h(x))^2}dx\Big)\Big)\\
&= \Theta\Big(n^q\frac{x}{h(x)}\Big|_1^{\log_c n}+(\log_c n-1)\frac{\xi h'(\xi)}{(h(\xi))^2}\Big) \qquad 1\le\xi\le\log_c n\\
&= \Theta\Big(\frac{n^q}{g(n)}\log_c n-n^q/g(c)\Big)
\end{aligned}$$

Für $g(n)=o(\log n)$, $f(n)=\Theta\Big(\frac{n^q}{g(n)}\Big)$ gilt dann $M(n)=\Theta(f(n)\log n)$. ■

Korollar 4 *Sei* $f(n)=\Theta\Big(\frac{n^q}{(\log_c n)^\alpha(\ln\log_c n)^\beta}\Big)$ *mit* $\alpha>0$*, dann ist* $M(n)=\Theta\Big(n^q(\frac{n^q}{(\log_c n)^\alpha(\ln\log_c n)^\beta}\Big)$.

Beweis: Setze $g(n)=(\log_c n)^\alpha(\ln\log_c n)^\beta$. Damit ist $h(x)=g(c^x)=x^\alpha(\ln x)^\beta$ und

$$c\le\frac{xh(x)}{h'(x)}=\alpha+\frac{\beta}{x^\alpha\ln x}\le C$$

■

Lemma 4 (Approximative Lösung III) *Sei* $q=log_a c$*,* $f(n)=\Theta\Big(\frac{n^q}{g(n)}\Big)$*,* $g>0$ *schwach variierend,* $\sum_{i\in\mathbb{N}}1/g(c^i)$ *divergent. Sei weiter* $h(x)=g(c^x)$ *und es gelte fast überall* $c/h\le h''\ln h/h'^2\le C/h$ *für Konstanten* c,C*. Dann gilt*

$$M(n) \;=\; \Theta\Big(\frac{n^q\ln g(n)}{h'(\log_c n)}-n^q\frac{\ln g(c)}{h'(1)}\Big)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
M(n) &= \Theta\left(n^q \int\limits_{i=1}^{\log_c n} \frac{1}{h(x)} dx\right) \\
&= \Theta\left(n^q \int\limits_{i=1}^{\log_c n} \frac{h'(x)}{h(x)h'(x)} dx\right) \\
&= \Theta\left(n^q \left(\frac{\ln h(x)}{h'(x)}\Big|_1^{\log_c n} + \int\limits_{i=1}^{\log_c n} \frac{h''(x)\ln h(x)}{(h'(x))^2} dx\right)\right) \\
&= \Theta\left(n^q \frac{\ln h(x)}{h'(x)}\Big|_1^{\log_c n}\right)
\end{aligned}$$

■

Korollar 5 *Sei* $f(n) = \Theta\left(\frac{n^q}{\log n}\right)$ *dann ist* $M(n) = \Theta(n^q \ln \log_c n)$.

Beweis: $g(x) = \log_c x \Rightarrow h(x) = g(c^x) = x \Rightarrow h' = 1 \Rightarrow h'' = 0$, $\sum\limits_{n>1} 1/n$ divergiert. ■

Lemma 5 *Sei* $0 \leq a < b$ *und* h *eine monoton fallende Funktionmit* $h'(b) \neq 0$. *Dann ist* $\int\limits_a^b h(x)dx = \Omega(h(b)^2/h'(b))$, *falls* $h(x) > h'(b)(x-b) + h(b)$ *auf dem Intervall* (a,b) *gilt und eine positive Konstante* d *existiert, so daß* $b - a \geq dh(b)/h'(b)$ *oder* $d < 1$ *und* $h(a) \leq dh(b)$ *gilt.*

Beweis: Sei $z = \frac{h(a)-h(b)}{h'(b)} + b$ die Abzisse des Schnittpunktes von $a(x) = h(a)$ und $b(x) = h'(b)(x-b) + h(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b h(x)dx &\leq \frac{(b-z)(h(b)-h(a))}{2} + (b-a)h(a) \\
&= \frac{(h(b)-h(a))^2}{2h'(b)} + (b-a)h(a) = \Omega\left(\frac{h(b)}{h'(b)}\right)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 5 *Gilt die obige Bedingung auf dem Intervall* $(0,\infty)$, *so ist dies äquivalent zur Konvexität auf diesem Bereich.*

Lemma 6 *Sei* $0 \leq a < b$ *und* h *eine monoton fallende Funktionmit* $h'(b) \neq 0$. *Dann ist* $\int\limits_a^b h(x)dx = \mathcal{O}(h(b)^2/h'(b))$, *falls Konstanten* $k, \epsilon > 0$, $\epsilon < 1$ *existieren, so daß* $h(x - nkh(b)/h'(b)) \leq \epsilon^n h(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die* $x - knh(b)/h'(b) \geq 0$ *genügen erfüllt ist.*

Beweis: Sei $p = \min\{n \in \mathbb{N} | b - n\frac{kh(b)}{h'(b)} \geq a\}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx &\leq \sum_{i=0}^{p} h\left(b - i\frac{kh(b)}{h'(b)}\right) \cdot \frac{kh(b)}{h'(b)} \\ &\leq \frac{kh(b)}{h'(b)} \sum_{i=0}^{p} h(b)\epsilon^i \leq \frac{kh(b)^2}{h'(b)} \cdot \frac{1}{1-\epsilon}\end{aligned}$$

■

Lemma 7 (Approximative Lösung IV) *Sei $q = log_a c$, $f(n) = \Theta(n^q g(n))$, $g > 0$ schwach variierend, $\sum_{i \in \mathbb{N}} g(c^i)$ divergent und sei $h(n)^2/h'(n) = o(logn)$ mit $h(x) = g(c^x)$, und es gelte fast überall $c/h \leq hh'/h'^2 \leq C/h$, für Konstanten c, C $(h' \neq 0)$. Dann gilt*

$$M(n) = \Theta\left(n^q \frac{g(n)^2}{h'(\log_c n)} - n^q \frac{g(c)^2}{h'(1)}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}M(n) &= n^q\left(M(1) + \Theta\left(\sum_{i=1}^{\log_c n} g(c^i)\right)\right) \\ &= \Theta\left(n^q \int_{i=1}^{\log_c n} g(c^x)dx\right) \\ &= \Theta\left(n^q\left(\frac{h(x)^2}{2h'(x)}\Bigg|_{i=1}^{\log_c n} - \int_{i=1}^{\log_c n} \frac{h''(x)h(x)^2}{2h'(x)^2}\right)\right) \\ &= \Theta\left(n^q \frac{h(x)}{h'(x)}\Bigg|_1^{\log_c n}\right)\end{aligned}$$

■

Korollar 6 *Sei $f(n) = \Theta(n^q \log n)^\alpha)$ mit $\alpha > 0$, dann ist $M(n) = \Theta(n^q(\frac{(\log n)^{\alpha+1} - c^{\alpha+1}}{\alpha}))$.*

Beweis: $\Theta(n^q(\frac{(\log n)^{\alpha+1} - c^{\alpha+1}}{\alpha})) = \Theta(f(n)\log n)$ für $\alpha > 1$. ■

Theorem 3 (Approximative Lösungen von T) *Sei $h(n) = g(c^n)$ und sei $q = \log_c a$. Ist*

- – *$f(n) = \Theta(n^q g(n))$,*
  – *$g > 0$ monoton fallend und*
  – *$\sum_{i \in \mathbb{N}} g(d^i)$ konvergent für ein $d > 1$,*

  dann gilt $M(n) = \Theta(n^q)$.

- - $f(n) = \Theta\left(\frac{n^q}{g(n)}\right)$,
  - $g > 0$ *schwach variierend und* $g(n) = o(\log n)$,
  - $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} 1/g(c^i)$ *divergent und*
  - *sei* $h(x) = g(c^x)$ *und es gelte fast überall* $c \leq xh'/h \leq C$ *für Konstanten* c, C.

  Dann gilt $M(n) = \Theta(f(n) \log n)$.

- - $f(n) = \Theta\left(\frac{n^q}{g(n)}\right)$,
  - $g > 0$ *schwach variierend,*
  - $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} 1/g(c^i)$ *divergent.*
  - *sei* $h(x) = g(c^x)$ *und es gelte fast überall* $c/h \leq h'' \ln h/h'^2 \leq C/h$ *für Konstanten* c, C.

  Dann gilt

  $$M(n) \quad = \quad \Theta\left(\frac{n^q \ln g(n)}{h'(\log_c n)} - n^q \frac{\ln g(c)}{h'(1)}\right)$$

- - $f(n) = \Theta(n^q g(n))$,
  - $g > 0$ *schwach variierend,*
  - $\sum_{i \in \mathbb{N}} g(c^i)$ *divergent und*
  - *sei* $h(n)^2/h'(n) = o(logn)$ *mit* $h(x) = g(c^x)$,
  - *und es gelte fast überall* $c/h \leq hh'/h'^2 \leq C/h$, *für Konstanten* c, C $(h' \neq 0)$.

  Dann gilt

  $$M(n) \quad = \quad \Theta\left(n^q \frac{g(n)^2}{h'(\log_c n)} - n^q \frac{g(c)^2}{h'(1)}\right)$$

Beweis:

- Approximative Lösung I von T
- Approximative Lösung II von T
- Approximative Lösung III von T
- Approximative Lösung IV von T

■