Dynamische Algebren
eine algebraisch logische Methodologie zur Spezifikation, Modellierung und Validierung von Systemen

Michael Bertol
Universität Stuttgart, Institut für Informatik
Breitwiesenstraße 20/22, D-70565 Stuttgart
e-mail bertolinformatik.uni-stuttgart.de

Inhaltsverzeichnis

1 Notation und generelle Voraussetzungen

Unsere Umgebung ist die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit und partiellen Funktionen. Die Synatx oder Sprache ist die gewöhnliche prädikatenlogische, die aus Variablen, Funktionssymbolen mit fixer Arität, den Wahrheitswerten *true* und *false*, den Junktoren $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$, den Quantoren $\forall$ und $\exists$ und eines Gleichheitssymbols $=$ besteht.

Wir gehen von einem im Modell als vorhandenes Element „*undefined*" und einer zu dem Element korrespondierenden Funktion *undefined* in der Signatur der Algebra *undefined* aus und verwenden den Begrff partielle Funktion entsprechend. Eine Interpretation I un einem Universum U legt dann für ein n-stelliges Funktionssymbol f eine totale Funktion $I(f)(U \setminus \{I(\mathit{undefined})\})^n \longrightarrow U$ fest, so daß eine (die) partielle Funktion $I'(f)$ des selben Typs als

$$I'(f)(\mathbf{y}) = \begin{cases} I(f)(\mathbf{y}) & I(f)(\mathbf{y}) \neq I(\mathit{undefined}) \\ \mathit{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

extrahiert werden kann. $\mathbf{y} \in U \setminus \{I(\mathit{undefined})\}^n$ steht für einen n-dimensionalen Wert.

Da wir explizit über Modelle sprechen werden, bevorzugen wir es direkt mit partiellen Funktionen notationell umgehen zu können. Deshalb führen wir eine (lediglich) syntaktische alternative Formulierung, die Logik mit partiellen Termen, ein. In ihr sollen keine speziellen „*undefined*" Objekte in den Modellen vorhanden sein, dafür braucht aber nicht jeder Term eine vollständige Interpretation zu besitzen. Die belegten Stellen identifizieren wir durch ein unäres Prädikat $\downarrow$, so daß $\downarrow$ intuitiv bedeutet, daß t definiert ist. Nur vollständig definierte Terme sind Instanzen einer universellen Quantifizierung bzw. einer existentiellen. Gleichheit (hier intensionale) bedeutet daß beide Seiten definiert sind und $\downarrow t \Leftrightarrow t = t$. Die Kleene-Äquivalenz ist eine leichte Abschwächung und wird mit

$$s \cong g := (\downarrow s \wedge \downarrow t) \Rightarrow t = s$$

definiert.

Eine partielle Interpretation in einem Universum U definiert eine partielle Funktion $I(f) : U^n \longrightarrow U$ zu jedem Funktionssymbol f und diese Definition ist partiell, denn die Interpretation kann nur auf Termen t, die definiert sind $\downarrow t$ angewendet werden. Wenn wir die Notation leicht durch Verwenden der Kleene-Äquivalenz $\cong$ leicht abändern, so sind wir auch in der Lage Pseudoterme aus partiellen Funktionen über U zu konstruieren. Dann gilt $I(f(t_1, \ldots, t_n)) \cong I(f)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ und wir sagen $I \models\downarrow s := I(s)$. Diese Interpretation impliziert die Striktheit der partiellen Definition, d.h.

$\downarrow f(t_1, \dots, l_n) \Rightarrow \downarrow t_1 \wedge \dots \wedge \downarrow t_n$. Insbesondere ein Element $I(c) \in U$ für eine konstante (nullstellige) Funktion $c$nur dann, wenn $I \models c$. Die gewöhnliche Ersetzung durch Gleiches muß durch die Bedingung

$$a \cong b\Phi(a) \Rightarrow \Phi(b)$$

ersetzt werden (wie durch strukturelle Induktion hergeleitet werden kann).

Syntaktische Gleichheit von Funktionsbeschreibungen bzw. Termen wird durch $\doteq$ notiert.

Wir werden Terme der Form IF Φ THEN a ELSE b, in denen Φ eine Formel ohne Quantoren ist. und wir verstehen unter dieser Schreibweise:

$$I(\text{IF } \Phi \text{ THEN } a \text{ ELSE } b) \cong \begin{cases} I(a) & I \models \Phi \\ I(b) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Das Benützen solcher Ausdrücke kann entweder durch eine Anpassung der Syntax sowie ein simultanes induktives Definieren von Termen und Formeln oder durch die Annahme, daß in jedem Modell auch die Wahrheitswerte *true* und *false* und mit jeder Signatur die entsprechenden booleschen Formeln konstruiert werden können.

Wir definieren einige syntaktische Operatoren auf Termen (Term Transformationen) und erweitern die die Transformationen zu Operatoren auf Formeln angewendet werden können durch die homomorphe Erweiterung über den Formelkonstruktoren. Wenn $\triangle$ eine Termtarnsformation ist, dann soll ihre homomorphe Erweiterung $\triangle'$ durch

$$\begin{array}{rclcrcl} \triangle'(s = t) & := & (\triangle s = \triangle t) & \quad & \triangle' \downarrow s & := & \downarrow \triangle s \\ \triangle' f(\dots \Phi \dots) & := & f(\dots \triangle' \Phi \dots) & & \triangle' Qx\Phi & := & Qx \, \triangle' \, \Phi \end{array}$$

definiert, wobei f ein nullstelliger, einstelliger oder zweistelliger Junktor und Q ein existenzieller oder universeller Quantor ist.

Wir werden auch partielle Operatoren $\bigtriangledown$, die nur unter gewissen Bedingungen wohl definiert sind, verwenden. Wenn $\bigtriangledown\Phi$ wohl definiert ist, falls Ψ erfüllt wird,benützen wir eine Formel der Form $\Psi \Rightarrow \bigtriangledown\Psi$. Den anderen Fall $\Psi \wedge \Rightarrow \bigtriangledown\Phi$ entnehme man folgenden definierenden Gleichungen:

$$\Psi \Rightarrow \bigtriangledown\Phi \;:=\; \begin{cases} \mathit{true} & \neq \Psi \\ \bigtriangledown\Phi & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \Psi \wedge \Rightarrow \bigtriangledown\Phi \;:=\; \begin{cases} \mathit{false} & \neq \Psi \\ \bigtriangledown\Phi & \text{otherwise} \end{cases}$$

2 Sequentielle dynamische Algebren

2.1 Grundlegende Definitionen — die Interpretation einfacher Regeln

Definition 1 *Wenn Σ eine Signatur (erster Stufe) ist, dann ist*

- *eine Aktualisierung einer Funktion f ein Ausdruck der Form $f(t_1, \ldots, t_n) ::= t$, wobei t und $f(t_1, \ldots, t_n)$ Terme der Signatur sind.*
- *eine Transitionsregel über Σ ein Ausdruck R der Form IF $R?$ THEN $R!$, wobei $R?$ eine aussagenlogische Formel ohne Quantoren und $R!$ eine endliche Menge von Aktualisierungen ist.*

Definition 2 *Eine Dynamische Algebra wird durch ein Paar (Σ, Γ) definiert. Sigma ist die (endliche) Signatur und Γ ist eine Menge von Transitionsregeln zu Σ.*

In Applikationen wird man hedrogene Signaturen bevorzugen (typisiert) mit mehreren (disjunkten) Universen, die sich im Laufe einer Berechnung vergrößern und verkleinern können. Diese Situation läßt sich aber mit unären Prädikaten auf den hier betrachteten Fall mit homogener Signatur und einfachen Updates der Funktionen zurückführen.

Annahme: Vorläufig lassen wir in Transitionsregeln nur Terme zu, die geschlossen sind, d.h. die keine Variablen enthalten.

Definition 3 *Sei $\mathcal{D} = (\Sigma, \Gamma)$ eine dynamische Algebra. Eine statische Algebra $\mathcal{S}$ ist eine Algebra (über Σ) im gewöhnlichen Sinne. D.h. ein Paar (U, I) eines Universums U mit einer partiellen Interpretation I von Σ in U.*

In der Realität werden die Algebren durch Integritätsbedingungen (Constaraints, Assertions) definiert (festgelegt). Das sind logische Axiome und/oder Inferenzregeln, die die Domänen spezifizieren. Im Verlaufe einer Berechnung verstehen wir eine Interpretation als ein gegen die Konsistenzen validierter Zustand. In unserer Theorie betrachten wir beliebige statische Algebren, obwohl beispielsweise für eine gegebene dynamische Algebra i.A. nicht jede von einer initialen Belegung aus erreichbar sein muß.

Da wir uns eine Menge von Aktualisierungen als simultan ausgeführt denken (falls die Vorbedingung in der entsprechenden Transition erfüllt war), darf nicht die selbe Funktion an der gleichen Stelle gesetzt werden. Ein anderer von Gurevich verfolgter Ansatz erlaubt das, indem noch ein Nichtdeterminismus an dieser Stelle eingeführt wird. Weiter sollen alle Terme, deren Wert benötigt wird um die Regel zu evaluieren, zur Verfügung stehen. Das soll heißen, daß ein Aktualisieren einer Funktion an einer undefinierten Stelle (eines der Argumente ist undefiniert) als inkonsistent betrachtet wird. Wir erlauben jedoch das Aktualisieren auf den wert „undefiniert“.

Im folgenden werden wir mit R eine Transitionsregel „IF $R?$ THEN $R!$“ beschreiben, in der $R!$ die Menge der Updates $f_i(s_i) ::= t_i$ ist und s_i Terme sind ($i = 1, \ldots, n$).

Definition 4

$$cond(R!) := (\bigwedge_i \downarrow s_i) \wedge (\bigwedge_{i \neq j, f_i \doteq f_j} (s_i = s_j \Rightarrow t_i = t_j))$$

Generalvoraussetzung: Wir werden immer davon ausgehen, daß alle Transitionsregeln konsistent sind, d.h. daß die Formel $R? \Rightarrow cons(R!)$ erfüllt ist. Unter dieser Annahme Können wir nun in unserer Sprache formulieren, was wir unter „simultaner Ausführung“ verstehen.

Definition 5 *Der Effekt einer Aktualisierung* $R! = \{f_i(s_i) := t_i\}$, *konsistent ausgehend von einer Algebra* (U, I), *ist die Transformation selbiger in eine neue Algebra* $(U, I_{R!}$, *wobei die Interpretation zu*

$$I_{R!}(f)(\mathbf{y}) := \begin{cases} I(t_i) & f \doteq f_i, \mathbf{y} = I(s_i), (i = 1, \ldots, n) \\ I(f)(\mathbf{y}) & otherwise \end{cases}$$

definiert ist. $\mathbf{y}$ *ist wieder ein zur Stelligkeit von* f *passendes Wertetupel aus* U.

Unter der Annahme, daß alle Aktualisierungen konsistent sind, ist $I_{R!}$ wohldefiniert. Betrachten wir die Auswertung von zusammengesetzten Ausdrücken so erhalten wir:

Lemma 1

$$I_{R!}(f)(\mathbf{u}) \cong \begin{cases} I(t_i) & f \doteq f_i, \mathbf{u} = I(s_i), (i = 1, \ldots, n) \\ I(f)(\mathbf{u}) & otherwise \end{cases}$$

Das Lemma motiviert die nun folgende Termtransformation $[R!]$, die zu einer Menge von Aktualisierungen $R! = \{f_i(s_i) ::= t_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ die korrespondierende syntaktische Ersetzung vollzieht:

$$\begin{aligned} [R!] : \quad = \quad & \text{IF } [R!]\mathbf{u} = s_i \text{ THEN } t_{i_1} \\ & \text{ELSEIF } \ldots \\ & \text{ELSEIF } [R!]\mathbf{u} = s_m \text{ THEN } t_{i_m} \\ & \text{ELSE } f([R!]\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Hierbei sollen $i_1, \ldots, i_m$ alle die Indizes sein für die die syntaktische Gleichheit $f \doteq f_i$ gilt.

Mit dieser Konstruktion erhalten wir eine leichte Verallgemeinerung des Substitutionslemmas der Logik erster Stufe.

Lemma 2 *Wenn eine Menge von Aktualisierungen $R!$ konsistent ist (d.h. $cons(R!)$ gilt unter I), dann gilt für jeden Term t:*

$$I_{R!}(t) \cong I([R!]t)$$

Definition 6 *Mögliche Anwendungen von Regeln und assoziierte Transformationen definiren wir zu*

$$pos(R) := R? \text{ sowie } [R]t := [R!]t$$

wobei [R] wohldefiniert ist, sobald $pos(R)$ erfüllt wird.

Durch eine homomorphe Erweiterung von $[R]$ zu $[R]'$ erhalten wir einen wohldefinierten, sequentiellen Operator, sobald R möglich ist. Wir verstehen unter $[R]\Phi$ das Bild einer Formel Φ der Logik erster Stufe, das wieder eine Formel der Logik erster Stufe ist, die so gebaut ist, daß wenn R angewendet werden kann nach der Transformation Φ gilt. Dual dazu soll die Formel $\langle R\rangle\Phi$ die nach der (möglichen) Applikation von R gilt Φ. Beide Operatoren sind eine Art Weakest-Precondition Berechner.

Definition 7 *Die modalen Operatoren $[R]$ und $\langle R\rangle$ sind wie folgt definiert.*

$$[R]\Phi := (pos(R) \Rightarrow [R]'\Phi \text{ und } \langle R\rangle\Phi := pos(R)\wedge \Rightarrow [R]'\Phi$$

Natürlich gilt mit dieser Definition

- $\langle R\rangle\Phi \Leftrightarrow\neq [R] \neq \Phi$, sowie
- falls $pos(R)$ erfüllt ist, daß beide Operatoren Homomorphismen bezüglich der logische Junktoren sind.

Der einfachste Spezialfall ist die wohlbekannte Ersetzungsregel von Hoar $[a := b]\Phi \Leftrightarrow \Phi[b/a]$.

Da $pos(R) \Leftrightarrow \langle R\rangle true$ gilt kürzen wir beide Formeln mit $\rangle R\langle$ ab.

Wir können nun zu jeder Regel R unter der Interpretation I eine weitere Interpretation $I_R := I_{R!}$ assoziieren. Wenn $\mathcal{A} = (U, I)$ notieren wir $\mathcal{A}_R$ für (U, I_R). Dieser Operator erlaubt es uns die Logik von $\mathcal{A}_R$ in $\mathcal{A}$ zu simulieren.

Theorem 1 *Falls $\mathcal{A} \models \langle R\rangle$, dann gilt $\mathcal{A}_R \models \Phi$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models [R]\Phi$ erfüllt ist.*

Wir haben jetzt präzise beschrieben, wie unserer abstrakter Mechanismus via Transformations- bzw. Transitionsregeln logische Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe transformiert. Dynamische Algebren können also als Transitionssysteme, d.h. gerichtete markierte Graphen, in denen die Knoten mit Interpretationen der Logik erster Stufe und kanten mit den entsprechenden Regeln markiert sind, aufgefaßt werden.

Definition 8 $\mathcal{A} \stackrel{R}{\longmapsto} \mathcal{A}_R$ *falls* $\mathcal{A} \models \langle R \rangle$.

2.2 Sequentielle Ausführungsfolgen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Idee möglicher Ausführungsfolgen sowie die vorgestellten Termtransformationen und modalen Operatoren zu Regeln die beschreiben wie Sequenzen von Regeln interpretiert werden.

Definition 9 *Jede Transitionsregel ist eine Sequentielle Ausführungsfolge. Sind* ρ, σ *sequentielle Ausführungsfolgen, dann auch* $\rho\sigma$.

Mögliche Ausführungsfolgen werden induktiv definiert: $\rho\sigma$ ist möglich, falls ρ möglich ist und danach σ möglich wird.

Da der Effekt auf logische Formeln jeder Regel durch ihre homomorphe Erweiterung definiert ist, wissen wir was letztere Formel bedeutet.

Definition 10

$$\begin{aligned} pos(\rho\sigma) &:= pos(\rho) \wedge \Rightarrow [\rho]' pos(\sigma) \\ s &:= [\rho][\sigma]s \end{aligned}$$

wobei $[\rho]'$ *die homomorphe Erweiterung von* $[\rho]$ *sein soll.*

Es ist einfach zu sehen, daß diese Konkatenation assoziativ ist.

Definition 11

$$[\rho]\Phi := pos(\rho) \Rightarrow [\rho]'\Phi \quad \langle\rho\rangle\Phi := pos(\rho) \wedge \Rightarrow [\rho]'\Phi$$

Wir erweitern die Notation wieder indem wir $pos(\rho)$ und $\langle\rho\rangle true$ durch $\langle\rho\rangle$ abkürzen.

Die modalen Operatoren können ebenfalls induktiv über Ausführungssequenzen definiert werden.

Definition 12 *Eine (sequentielle) Ausführungsfolge einer Statischen Algebra* $\mathcal{A}$ *wird durch einen Ausdruck* ρ*, für den* $\mathcal{A} \models \langle\rho\rangle$ *beschrieben.*

Wie mit nur einfachen Regeln können wir jetzt auch zu einer Algebra $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Algebra $\mathcal{A}_\rho = (U, I_\rho$ mit $I_\rho(s) \cong I([\rho]s)$ assoziieren.

Theorem 2 *Wenn ρ eine Ausführungsfolge für die Algebra $\mathcal{A}$ ist, dann gilt $\mathcal{A}_\rho \models \Phi$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models [\rho]\Phi$.*

Beweis: Mit Induktion nach der Länge von ρ und dem anwende der Induktionsvoraussetzung auf alle statischen Algebren, die während einer Berechnung entstehen. ∎

Definition 13 *Für $\mathcal{A} \models \langle\rho\rangle$ notieren wir auch $\mathcal{A} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho$.*

Führen wir noch eine leere Ausführungsfolge ein, so erhalten wir die freie Kategorie, die durch die Transitionsregel erzeugt wird, beschrieben durch den Graphen der erreichbaren Algebren. Damit haben wir beschrieben wie in unserem Berechnungsmodell längere Sequenzen interpretiert bzw. simuliert werden.

3 Kooperation und Konkurrenz

In diesem Abschnitt führen wir grundlegende Ideen ein, wie man mit unserer logischen Theorie Konkurrenz bzw. Unabhängigkeit beschreibt, was für Effekte auftreten können wenn man parallele Ausführungen zuläßt und das ohne wie es sonst üblich ist ein Konzept wie Zeit, globale Zeit, Simultanität oder Ähnliches zu gebrauchen. Wir werden die Unabhängigkeit einzelner Regeln und sequentieller Ausführungsfolgen betrachten. Intuitiv sind zwei Ausführungsfolgen unabhängig, wenn sie von zwei unabhängigen, d.h. nicht miteinander kommunizierenden oder sich synchronisierenden Interpreten, die die Modelle sukzessive ändern und immer zum richtigen (selben) Resultat gelangen. Da die Aktualisierung die durch eine Regel hervorgerufen wird als ein Primitiv (atomar) betrachtet wird, sollen nur nicht widersprüchlich Updates stattfinden. Eine gleichzeitige Aktualisierung auf den gleichen Wert braucht jedoch nicht verboten zu werden. Unsere Interpreter werdenen also durch ihre Unfähigkeit widersprüchliche Aktualisierungen auf einem Modell vornehmen zu können synchronisiert. Tritt eine solche Situation auf so muß ein Interpreter warten bis der andere mit seinem Update fertig ist.

Unsere vorläufige Beschreibung erlaubt damit die parallele Ausführung einer Menge von paarweise Unabhängigen Sequenzen. Wir werden die Idee der mögliche Ausführungen und die Transformationen sowie die modalen Operatoren weiter entwickeln.

3.1 Unabhängige Regeln

Zwei Regeln sind unabhängig, wenn sie konsistent gemeinsam ausgeführt werden können und die Regeln sich nicht gegenseitig beeinflussen. Wir können die Interpreter als mit einem Mechanismus versehen betrachten, der alle benötigten Daten während der Berechnung gegen schreiben sperrt.

Definition 14

$$
\begin{aligned}
dom f(t_1, \ldots, t_n) &:= \Big(\bigcup_{i=1,\ldots,n} dom t_i\Big) \cup \{f(t_1, \ldots, t_n)\} \\
dom \Phi &:= \bigcup_{t \ \ occures \ in \ \Phi} dom t \\
dom f(t_1, \ldots, t_n) ::= t &:= \Big(\bigcup_{i=1,\ldots,n} dom t_i\Big) \cup dom t \\
dom R! &:= \Big(\bigcup_{u \in R!} dom u \\
dom R? &:= \Big(\bigcup_{\Phi \in R?} dom \Phi \\
dom R &:= dom R? \cup dom R!
\end{aligned}
$$

In der folgenden Definition wird festgelegt wann Regeln nebenläufig ohne Konflikte simuliert werden können.

Definition 15

$$
\begin{aligned}
I(R, S) \quad := \quad & \langle R \rangle \wedge \langle S \rangle \wedge cons(R! \cup S!) \\
& \bigwedge_{r \in dom R} ([S] r \cong r) \wedge \bigwedge_{s \in dom S} ([R] s \cong s)
\end{aligned}
$$

Die erste Klausel sichert die simultane Ausführbarkeit der Regeln R und S zu, d.h. die Möglichkeit einer Regel der Form IF $R? \wedge S?$ THEN $R! \cup S!$. Die restlichen zwei Konjunktionen stehen dafür, daß das Resultat unabhängig von der Reihenfolge der Ausführung ist.

Man beachte das auch die Formel $I(R, S)$ keine Quantoren enthält. Unabhängigkeit ist von der jeweiligen Situation abhängig, was soviel bedeutet wie das Unabhängigkeit erst im verlauf einer Berechnung entschieden werden kann.

Lemma 3 *Aus $I(R, S)$ folgt für jede aussagenlogische Formel Φ:*

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Die zweite folgt aus $dom\langle S\rangle = domS? \subseteq domS$, sowie der gleichen Inklusion für R. Werde das Funktionssymbol f in R durch die Anweisung $f(\mathbf{u_i}) ::= r_i \; i = 1,\ldots,n$ und in S durch die Anweisungen a$f(\mathbf{v_j}) ::= r_j \; j = 1,\ldots,m$ aktualisiert. Wegen der Unabhängigkeit gilt $[S!]\mathbf{u_i} \cong \mathbf{u_i}$, $[S!]r_i \cong r_i$, $[R!]\mathbf{v_j} \cong \mathbf{v_j}$, $[R!]s_j \cong s_j$ $(i = 1,\ldots,n,\; j = 1,\ldots,m)$. Damit ist

$$
\begin{array}{rcl}
[R!][S!]f(\mathbf{t}) & \cong & [R!](\text{ IF } [S!]\mathbf{t} = \mathbf{v_1} \text{ THEN } s_1 \\
& & \text{ELSEIF } [S!]\mathbf{t} = \mathbf{v_m} \text{ THEN } s_m \\
& & \text{ELSE } f([S!]\mathbf{t})) \\
& \cong & \text{ IF } [R!][S!]\mathbf{t} = \mathbf{v_1} \text{ THEN } s_1 \\
& & \ldots \\
& & \text{ELSEIF } [R!][S!]\mathbf{t} = \mathbf{v_m} \text{ THEN } s_m \\
& & \text{ELSEIF } [R!][S!]\mathbf{t} = \mathbf{u_1} \text{ THEN } r_1 \\
& & \ldots \\
& & \text{ELSEIF } [R!][S!]\mathbf{t} = \mathbf{u_n} \text{ THEN } r_n \\
& & \text{ELSE } f([R!][S!]\mathbf{t}))
\end{array}
$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $[R!][S!]\mathbf{t} \cong [S!][R!]\mathbf{t}$ und wegen der Symmetrie folgt $[R!][S!]f(\mathbf{t}) \cong [S!][R!]f(\mathbf{t})$. Die verbleibenden Aussagen folgen unmittelbar. ■

3.2 Unabhängigkeit von Ausführungsfolgen

Hier definieren wir analog zum sequentiellen Fall wieder induktiv. Der Grundgedanke dabei ist, daß zwei Sequenzen unabhängig sind, falls sie beide möglich sind, ihre Anfangssequenzen unabhängig sind und beide Eigenschaften unter beliebiger Ausführungen von Anfangssequenzen erhalten bleiben. Das wir durch die folgende Definition ausgedrückt.

Definition 16

$$
\begin{array}{rcl}
I(R,\tau) & := & I(\tau,R) \quad \textit{für jedes zusammengesetzte } \tau \\
I(\rho\sigma,\tau) & := & I(\rho,\tau) \wedge [\rho]I(\sigma,\tau)
\end{array}
$$

Mit dieser Definition sind wir in der Lage die verschiedenen Eigenschaften von Unabhängigkeit zu beweisen.

Lemma 4 *Falls $I(\rho,\sigma)$ gilt, dann gelten folgende Aussagen für jede logische Formel Φ.*

$$\langle\rho\rangle \wedge \langle\sigma\rangle$$
$$[\sigma]\langle\rho\rangle \wedge [\rho]\langle\sigma\rangle$$
$$[\rho\sigma]\Phi \Leftrightarrow [\sigma\rho]\Phi$$
$$\langle\sigma\rho\rangle\Phi \Leftrightarrow \langle\rho\sigma\rangle\Phi$$

Beweis: Mit Induktion simultan über alle Aussagen und alle auftretenden statischen Algebren. ■

Mit einer Routineinduktion über $I(\rho,\sigma)$ erhalten wir auch noch die Symmetrie des Prädikats:

Korollar 1

$$I(\rho,\sigma) = I(\sigma,\rho)$$

Die Unabhängigkeit zweier Ausführungsfolgen hängt nicht von einer unabhängigen dritten ab.

Lemma 5 *Aus $I(\rho,\tau) \wedge I(\sigma,\tau)$ folgt*

$$I(\rho,\sigma) \Leftrightarrow [r]I(\rho,\sigma)$$

Beweis: Mit Induktion über die Summe der Längen von ρ, σ und τ und allen betroffenen statischen Algebren sieht man die Behauptung. Der Induktionsanfang, drei einfache Transitionsregeln R, S, T, folgt aus der Tatsache, daß die Formel $I(R,S)$ nur Terme aus den Domänen von R und S enthält. Der Induktionsschritt, den man für eine Verlängerung von τ vollziehen muß, ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt zur Verlängerung von ρ ist etwas Aussagenlogik notwendig. Um zu beweisen, daß $A \wedge B \wedge C \Rightarrow (D \wedge E \Leftrightarrow F \wedge G)$ reicht es aus die drei Aussagen

$$A \wedge C \Rightarrow (D \Leftrightarrow F) \quad A \wedge B \wedge H \Rightarrow (E \Leftrightarrow G) \quad A \wedge B \Rightarrow (C \Leftrightarrow H)$$

zu validieren. Wir müssen für jede Algebra $\mathcal{A}$

$$I(\mu\nu,\tau) \wedge I(\sigma,\tau) \Rightarrow (I(\mu\nu,\sigma) \Leftrightarrow [\tau]I(\mu\nu,\sigma))$$

zeigen was soviel heißt wie

$$\begin{array}{rclrclrcl} A & := & I(\mu,\tau) & B & := & [\mu]I(\nu,\tau) & C & := & I(\sigma,\tau) \\ D & := & I(\mu,\sigma) & E & := & [\mu]I(\nu,\sigma) & F & := & [\tau]I(\sigma,\sigma) \\ G & := & [\tau][\mu]I(\nu,\sigma) & & & & H & := & [\mu]I(\sigma,\tau) \end{array}$$

Mit dieser Definition folgen alle Behauptungen aus der Induktionsannahme angewendet auf $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{A}_\nu$ direkt. ■

3.3 Konkurrenz

Unabhängige Ausführungsfolgen wurden so definiert, daß sie nebenläufig simuliert werden können. Wir führen eine explizite Notation für eine (teilweise nebenläufige) Ablaufsequenz ein, die auf mögliche Nebenläufigkeit hinweißt. $\rho(\sigma \parallel \tau)(\mu \parallel \nu)$ soll bedeuten, daß zuerst ρ, dann eventuell nebenläufig σ und τ und hernach eventuell ebenfalls nebenläufig μ und ν simuliert werden.

Wir müssen noch definierten wann eine solche nebenläufige Sequenz möglich ist und die durch die Simulation hervorgerufenen Effekte durch entsprechende Operatoren und Transformationen charakterisieren. Wir werden zeigen wie man eine nebenläufige Sequenz in eine äquivalente sequentielle transformiert. Damit erhalten wir entsprechend übertragene Resultate auch für nebenläufige Sequenzen. Man kann eine solche nebenläufigen Aktualisierungssequenz als eine Klasse von äquivalenten seriellen Sequenzen betrachte (in einem fixen Kontext).

Definition 17 *Die Definition von sequentiellen Aktualisierungsfolgen wird um ein Konstrukt erweitert: Sind σ und ρ Sequenzen, so ist auch $(\rho \| \sigma)$ eine.*

In unseren Ausdrücken soll sie Konkatenation (sequentielle Interpretation) stärker binden als der Verknüpfung mit dem Nebenläufigkeitssymbol $\|$.

Wir erweitern die Definition von möglichen Ausführungssequenzen und deren Effekt wie folgt:

Definition 18

$$\begin{aligned} pos(\rho \| \sigma) &:= I(\rho, \sigma) \\ I((\rho \| \sigma), \tau) &:= I(\rho, \tau) \wedge I(\sigma, \tau) \wedge I(\rho, \sigma) \\ [\rho \| \sigma]s &:= [\rho][\sigma]s \end{aligned}$$

Wir sequentialisieren nebenläufige Aktualisierungssequenzen nach folgender definiten:

Definition 19

$$R^* := R \quad (\rho\sigma)^* := \rho^*\sigma^* \quad (\rho \| \sigma)^* := \rho^*\sigma^*$$

Wenn wir die Definition der modalen Operatoren auf nebenläufige Aktualisierungen erweitern, so erhalten wir:

Theorem 3 *Gilt $\langle\rho\rangle$, so gilt für jede Formel Φ*

$$\begin{aligned} &\langle\rho^*\rangle \\ I(\rho, \sigma) &\Leftrightarrow I(\rho^*, \sigma^*) \\ [\rho]\Phi &\Leftrightarrow [\rho^*]\Phi \end{aligned}$$

Beweis: Durch eine einfache Induktion über die Länge des Ausdrucks und alle relevanten Algebren. ∎

Korollar 2 *Falls $\langle\rho\|\sigma\rangle$ gilt und τ eine beliebige gemischte Teilsequenz von ρ^* und σ^*, dann gilt für jede Formel Φ*

$$\begin{aligned} [\rho\|\sigma]\Phi &\Leftrightarrow [\tau]\Phi \\ \langle rho\|\sigma\rangle &\Leftrightarrow \langle\tau\rangle \end{aligned}$$

4 Konstruktion von Dynamischen Algebren

In diesem Abschnitt führen wir ein paar einfache Techniken an mit den Dynamische Algebren aus bekannten konstruiert werden können. Ein grundlegendes Konstrukt ist die (nebenläufige) Komposition, die mit der zusätzlichen Einführung von Bedingungen an Regeln ausreicht alle (dynamischen) Algebren zu erzeugen.

4.1 Grundlegende Konstrukte

Wir haben dynamische Algebren im wesentlichen mir einer Menge von Regeln identifiziert. Ein erstes Konstrukt soll deshalb die (nebenläufige) Komposition sein, die es zwei dynamischen Algebren ermöglicht nebeneinander zu simulieren.

Definition 20 *Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei dynamische Algebren sind, dann verstehen wir unter $\mathcal{A}\|\mathcal{B}$ die disjunkte Vereinigung beide Algebren (regelmengen)*

Statische Algebren zu Vereinigen ist etwas „trickie“, Da die Integrität einer statischen Algebra von $\mathcal{A}$ durch anwenden von Transitionsregeln aus $\mathcal{B}$ erreicht wird und umgekehrt, müssen offensichtlich die Universen identisch sein. Da die Universen aber beliebig erweiterbar sind ist diese Bedingung keine wesentliche Einschränkung. Jedoch wenn die Signaturen der (statischen) Algebren nicht disjunkt sind, müssen die Interpretationen der Funktionen die dem Schnitt zugehören gleich sein. Wir definieren die Konsistenz zweier statischer Algebren wie folgt:

Definition 21 *Seien j, K Interpretationen der Signaturen $\Sigma_{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{B}}$ über dem selben Universum U. Dann sind die korrespondierenden Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konsistent, wenn die Interpretationen auf dem Schnitt $\Sigma_{\mathcal{A}} \cap \Sigma_{\mathcal{B}}$ übereinstimmen. D.h. für alle Symbole $f \in \Sigma_{\mathcal{A}} \cap \Sigma_{\mathcal{B}}$ gilt $J(f) = K(f)$.*

Konsistente statische Algebren können in gewöhnlicher Weise durch die Vereinigung der Graphen der Interpretationen verknüpft werden.

Definition 22 *Wenn $A = (U, J)$ und $B = (U, K)$ konsistente Belegungen zweier (statischer) Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind, dann ist*

$$A \| B := (U, J \cup K)$$

Die Konsistenz zweier Algebern sichert die Wohldefiniertheit von $JJ \cup K$ in obiger Definition zu. Vereinigt man zwei konsistente Algebren, so erhält man offensichtlich wieder eine. Restringiert man Interpretationen auf Teile der Signatur, so siegt man das alle statischen Algebren als Komposita angesehen werden können.

Als eine Unmittelbare Konsequenz der obigen Definition ist der Erhalt lokaler Bedingungen wie im nächsten Lemma formuliert:

Lemma 6 *Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ konsistente statische Algebren zu den dynamischen Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind, dann gilt*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \| \mathcal{B} \models \Phi & \Sigma(\Phi \subseteq \Sigma(\mathcal{A}) \\ \mathcal{B} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \| \mathcal{B} \models \Phi & \Sigma(\Phi \subseteq \Sigma(\mathcal{B}) \end{array}$$

Insbesondere kann Φ an dieser Stelle die Konsistenz, Möglichkeit oder Unabhängigkeit zweier Regeln sein. Eine Regel R aus $\mathcal{A}$ modifiziert auf der gemeinsamen Interpretation $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{A}_R$. Über die Modifikation von Funktionen aus dem gemeinsamen Schnitt beider Signaturen sind die Algebren in der Lage zu kommunizieren.

Theorem 4 *Seien $\mathcal{A} = (U, J)$, $\mathcal{B} = (U, K)$ konsistente statische Algebren der korrespondierenden Algebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Weiter Sei R eine mögliche Regel aus $\mathcal{A}$ und S eine aus $\mathcal{B}$. Dann gilt*

$$(\mathcal{A} \| \mathcal{B})_R = \mathcal{A}_R \mathcal{B}^R \quad (\mathcal{A} \| \mathcal{B})_R = \mathcal{A}^S \mathcal{B}_R$$

wobei

$$\mathcal{B}^R = (U, (J \cap K) | R \mid_{\Sigma(B)} \quad \mathcal{A}^S = (U, (J \cap K) | A \mid_{\Sigma(A)}$$

notiert.

Erweitert man die obige Notation auf beliebige Aktualisierungssequenzen, so erhält man sogleich korrespondierende Inferenzregeln für das Transitionssystem über den statischen Algebren.

Korollar 3 *Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ konsistente statische Algebren sind, dann gilt die Inferenzregel:*

$$\frac{\mathcal{A} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho \quad \mathcal{B} \overset{\sigma}{\longmapsto} \mathcal{B}_\sigma \quad \mathcal{A}\|\mathcal{B} \models I(\rho,\sigma)}{\mathcal{A}\|\mathcal{B} \overset{\rho\|\sigma}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho^s igma\|\mathcal{B}_s igma^\rho}$$

Man beachte, daß die Unabhängigkeit die Symmetrie der Operationen $(\mathcal{A}_\rho)^\sigma$ bzw. $(\mathcal{A}^\sigma)_\rho$ impliziert. Wenn wir die leere Sequenz, die von allen anderen unabhängig ist, betrachten erhalten wir folgenden interessanten Spezialfälle:

$$\frac{\mathcal{A} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho}{\mathcal{A}\|\mathcal{B} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho\mathcal{B}^\rho} \quad \frac{\mathcal{B} \overset{\sigma}{\longmapsto} \mathcal{B}_\rho}{\mathcal{A}\|\mathcal{B} \overset{\sigma}{\longmapsto} \mathcal{B}^\sigma\mathcal{B}_\sigma}$$

Wir führen ein weiteres Konstrukt ein, das es erlaubt weitere Bedingungen an Regeln zuzufügen.

Definition 23 *Wenn $\mathcal{A}$ eine dynamische Algebra ist, b ein boolescher Term, dann soll die Algebra $?b\mathcal{A}$ die Algebra bezeichnen, in der die Regeln aus der Algebra $\mathcal{A}$ zu*

$$b?R := \quad IF\ b \wedge R?\ THEN\ R!$$

modifiziert wurden. Statische zu $b\mathcal{A}$ korrespondierende Algebren bezeichnen wir mit $\beta?\mathcal{B}$.

An dieser Stelle nützen wir die ganze Freiheiten aus, die wir uns eingeräumt haben Terme als boolesche Formeln aufzufassen: an dieser Stelle steht b im Bedingungsteil der Regel für $b = true$. Wir erhalten $\mathcal{A}$ von $\beta\mathcal{A}$ durch Restriktion der Interpretation auf $\Sigma(\mathcal{A})$ und β soll uns daran erinnern, daß auch b interpretiert werden muß. Die folgende Inferenzregel ist offensichtlich richtig.

$$\frac{\mathcal{A} \overset{R}{\longmapsto} \beta?\mathcal{A} \models b}{?\beta\mathcal{A} \overset{b?R}{\longmapsto} \cdot} \frac{?\beta\mathcal{A} \overset{b?R}{\longmapsto} \cdot}{\mathcal{A} \overset{R}{\longmapsto} \beta?\mathcal{A} \models b}$$

Oft läßt sich das Konstrukt $\{f\}\mathcal{A}$ benutzen. f soll ein Funktionssymbol sein, das nur zur Signatur von $\mathcal{A}$ gehört und zu keiner anderen. Wir nennen solch Funktionen im weiteren intern oder opaque. Immer wenn $\{f\}\mathcal{A}$ mit einer Algebra $\mathcal{B}$ verknüpft wird, gehen wir von $f \notin \Sigma(\mathcal{B})$ aus. Das bedeutet, daß eine Änderung der Umgebung durch andere Algebren sowie eine Änderung der Beleging von f keinen sichtbaren Effekt für die beteiligten Algebren hat, bzw die Interpretation nicht geändert werden kann. Mit Umgebung (oder Envoronment) bezeichnen wir den Skopus von einer Algebra.

4.2 Abgeleitete Konstrukte

Einige Konstrukte, eng verwandt mit denen aus diversen Prozeß-Kalküli können einfach aus unserem abgesteckten Rahmen abgeleitet werden. So zum beispiel Interne und Externe Wahl, Sequentielle Komposition und vieles andere. Da jede Regel als eine nebenläufige While-Schleife interpretiert werden kann, ist es möglich unsere Algebren als nebenläufige (parallele) Programmiersprache zu betrachten.

Es ist üblich zwischen statischen und dynamischen Funktionen (Funktionssymbolen) zu unterscheiden. Die einen sind die, die nicht durch Aktualisierungen verändert werden können, die anderen sind die, deren Interpretation sich im Laufe einer Stimulation verändern kann. Ohne Einschränkung gehen wir davon aus, daß beispielsweise so essentielle Konstanten wir *true* oder *false* nicht in einer Berechnung umbelegt werden können.

Es ist außerdem üblich von einem initialen Modell auszugehen, in dem sämtliche Funktionen überal undefiniert sind. Dem Benutzer obliegt dann eine die Belegung initialisierende Algebra voranzuschalten. Man beachte, daß diese Annahme eine relativ starke Einschränkung im Modellgraphen zur folge hat. Wir betrachten nur noch Algebren, die von der initialen Algebra aus erreichbar sind.

Definition 24 *Seine $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dynamische Algebren und $c \notin \Sigma(\mathcal{A}) \cup \Sigma(\mathcal{B})$ ein neu eingeführtes sich von allen anderen unterscheidendes Element. Dann soll*

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{c\}(T(f) \mid F(c) \mid c?\mathcal{A} \mid (\neg c)?\mathcal{B})$$

bedeuten, mit

$$\begin{aligned} T(c) &:= \quad IF\ \uparrow c\ THEN\ c ::= true \\ T(c) &:= \quad IF\ \uparrow c\ THEN\ c ::= false \end{aligned}$$

$\uparrow$ soll die Negation von $\downarrow$ sein und $\neg c$ repräsentiert natürlich $c = false$. Wenn ein solches c anfangs undefiniert ist, so kann nur einer der beiden Regeln $T(c)$ oder $F(c)$ zur Anwendung gelangen. Die Wahl zwischen beiden Regeln ist nicht determiniert. Da c nicht zum Environment der Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gehört, kann es durch keine Regel die Belegung von c wieder rückgängig gemacht werden. Nach der (nichtdeterministischen) Wahl ist die Interpretation von c also eingefroren und die so konstruierte Algebra $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ verhält sich je nach Belegung wie $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$.

Definition 25 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dynamische Algebren und $c \notin \Sigma(\mathcal{A}) \cup \Sigma(\mathcal{B})$ ein neu eingeführtes sich von allen anderen unterscheidendes Element und b ein boolescher Term. Dann bedeutet*

$$\mathcal{A} \oplus_b \mathcal{B} := \{c\}(S(b, c) \mid c?\mathcal{A} \mid (\neg c)?\mathcal{B}$$

mit

$$S(b,c) := \ IF \ \uparrow c \wedge \downarrow b \ THEN \ c ::= b$$

In dieser Situation wird durch die Interpretation von b zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gewählt. Das Symbol c macht die Wahl fix, falls sie einmal getroffen wurde. Nach der Anwendung von der Regel $S(b,c)$ kann $\uparrow c$ nie mehr zutreffen.

Die sequentielle Komposition zweier dynamischer Algebren kann durch einen Trick modelliert werden. Das Terminieren einer dynamischen Algebra $\mathcal{A}$ würde durch einen booleschen Ausdruck $s_{\mathcal{A}}$ festgestellt werden. Wenn ein solcher Ausdruck das anzeigt, dann muß folgendes gelten:

$$\bigwedge_{R \in \mathcal{A}} \neq \langle R \rangle \Leftrightarrow s_{\mathcal{A}}$$

Definition 26 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dynamische Algebren und werde die Termination von $\mathcal{A}$ durch einen booleschen Funktion $s_{\mathcal{A}}$ detektiert, die nicht aus der Signatur $\Sigma(\mathcal{B})$ stammt. Dann notieren wir mit*

$$\mathcal{A};\mathcal{B} := \{s_{\mathcal{A}}\}(\mathcal{A} \mid s_{\mathcal{A}}?\mathcal{B})$$

die sequentielle Ausführung zweier Algebren.

Die korrespondierende statische Algebra bezeichnen wir mit $\mathcal{A};\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ erhält man durch Restriktion der Interpretation.

Wir erhalten die üblichen Inferenzregeln für die sequentielle Komposition:

$$\frac{\mathcal{A} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho}{\mathcal{A};\mathcal{B} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathcal{A}_\rho;\mathcal{B}^\rho} \frac{\mathcal{A} \models s_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \overset{\sigma}{\longmapsto} \cdot}{\mathcal{A};\mathcal{B} \overset{s_{\mathcal{A}}?\sigma}{\longmapsto} \cdot}$$

Es ist offensichtlich, daß man statt $\mathcal{B}$ die modifizierte Algebra $\mathcal{B}^\rho$ betrachten muß. Mit diesen Konstruktionsprinzipien sind wir in der Lage Funktionen mit (endlichen) Interpretationen via einfacher Aktualisierungen vor einer zu simulierenden Berechnung zu initialisieren. Durch Zusammenfassen all dieser Initialisirungen in einer dynamischen Algebra $\mathcal{I}\backslash\rangle\sqcup$ — im endlichen Fall durch eine endliche Anzahl von Aktualisierungsregeln mit leerem Bedingungsteil — können wir jede beliebige (endliche Initialisierung mit $\mathcal{I}\backslash\rangle\sqcup;\mathcal{A}$ modellieren.

Zusammen mit den bekannten Modellierungen für Assignments (Daten) und Kommunikation (Informationsaustauch zwischen Algebren bzw. Modellierten Konstrukten) haben wir ein allgemeines Modell für parallele (nebenläufige Berechnungen, Verfahren, Algorithmen u.v.m. beschrieben.

4.3 Erweiterung der Sprache — Zähler, Universen, Variablen

Bis jetzt haben wir eine sehr rudimentäre, spartanische Notation zur Verfügung gestellt. Wir erweitern unsere Notation um einige häufig verwendbare Konstrukte ohne das wir die bis dato erreichten Resultate verlieren würden.

Oft ist es notwendig Aktionen zu zählen. In den sequentiellen (dynamischen) Algebren ist das einfach: Man nimmt einen sich von allen anderen Symbolen unterscheideneden Bezeichner *count*, der einen Integer modelliert, ein und erweitert die relevanten Aktionen um die Aktualisierung $count ::= count{+}w$. Da *count* in jeder der relevanten Regeln (Aktionen) vorkommt schließen sich gleichzeitige Aktualisierungen aus, dann *count* gehört dann zu jeder Domäne und die regeln wären nicht unabhängig. Wird eine Regel von einem Interpreter bearbeitet, dann sperrt unser Mechanismus sämtliche Abarbeitungen anderer Regeln, die ebenfalls den Zähler enthalten. Dadurch geht selbstverständlich Nebenläufigkeit (Parallelität) zu Gunsten eines korrekten Ergebnisses verloren.

Es ist aber häufig nicht notwendig die einzelnen Aktualisierungen zu sequentialisieren. Man stelle sich beispielsweise ein Spiel vor, indem es darauf ankommt, daß eine Mannschaft (mehrere Argenten) möglichst viele Bälle (gleichzeitig in ein Netz werfen muß. In dieser Situation wäre es unnötig restriktiv von den einzelnen Spielern zu fordern zu warten, bis ein Mitspieler seinen Wurf getan hat. Unsere Definitionen sind für dieses Problem, die Bälle zu zählen, nicht geeignet.

Wir umgehen die Schwierigkeit, indem wir eine spezielle Form von Aktualisierung $count :: + = w$, zugeschnitten auf Zähler, einführen. Betreffend die Konsistenz, den Effekt und die Interpretation (Domäne) von Zählern legen wir folgende Konvention fest.

Konvention: Sei

$$C = \{count :: + = w_1, \ldots , count :: + = w_k\}$$

und sei $R!$ eine Menge von von Aktualisierungen einer Regel R, die keine Inkrementierungen enthält. Dann ist

$$\begin{aligned}
cons(C \cup R!) &= \downarrow count \wedge cons(R!) \wedge ([R!]count = count) \\
[C \cup R!]t &= \begin{cases} count + w_1 + \cdots + w_k & t = count \\ \text{rekursives Resultat} & \text{otherwise} \end{cases} \\
dom(C \cup R!) &= dom w_1 \cup \ldots \cup dom w_k \cup dom R!
\end{aligned}$$

Einige Inkrementierungen des selben Zählers sind dann unabhängig und unsere schon entwickelte Theorie über nebenläufige Aktualisierungen ergibt einen nebenläufigen, handhabbaren Zähler.

Diese Zähler lassen sich verallgemeinern, indem wir uns die Technik der dynamischen Universen zu Nutze machen. Man geht hier von einem Superuniversum U aus in dem viele Teiluniversen verschiedener Signaturen eingebettet sind. Immer wenn wir von einem Element x feststellen wollen aus welchem (dynamischen) Universum $S \subseteq U$ es stammt, brauchen wir nur die entsprechende charakteristische (simultan während der Berechnung aktualisierbare) Funktion χ_S zu fragen. Wir schreiben als Abkürzung für $\chi_S(x) = true$ lediglich $x \in S$. Wenn wir über die (dynamische) Erweiterung oder Einschränkung eines solchen Universums S reden, so verstehen wir darunter ein Reserve-Universum R aus dem die einzelnen Elemente genommen bzw. wieder zurückgetan werden. D.h. Entfernt man ein Element x aus S, so wird $\chi_S(x) = \mathit{false}$ und $\chi_R(x) = \mathit{true}$ gesetzt. Beim Hinzunehmen eines Elements verfährt man entsprechend anders. So ist gewährleistet, daß die verschiedenen Universen R,S_i $(i = 1, \ldots, n)$ in einem gewissen Sinn disjunkt sind. Weiter soll der Bereich sowie co-Bereich einer jeden anderen (nicht einer Universum charakterisierenden) Funktion in der Interpretation aus $U \setminus R$ stammen.

Das Verwerfen eines Elements ist relativ einfach. Wir benützen dazu die Abkürzung

$$\text{DISCARD } t \text{ FROM } S := \chi_S(t) ::= \mathit{false}$$

Ein erweitern einer Domäne vollzieht sich so:

$$\text{EXTEND } S \text{ BY } x \text{ WITH } u := \{ \begin{array}{l} \chi_R(x) ::= \mathit{false}, \\ \chi_S(x) ::= \mathit{true}\} \cup u \end{array}$$

x ist dabei das relevante Element und u ist eine Menge von Aktualisierungen, die die Einführung des neuen Elements nach sich zieht. Wie die opaquen Variablen können diese erweiterten Werte als von allen anderen Werten als verschieden betrachtet werden. Auch hier führen wir eine Konvention ein.

Konvention: Wenn die Beschreibung einer dynamischen Algebra erweiterbare Universen umfaßt, gehen wir davon aus, daß jede korrespondierende statische Algebra eine feste Belegung der von Erweiterungsvariablen aus der zuletzt angewandten Regel R mit den entsprechenden ausgezeichneten Werten enthält. Die erweiternden Aktualisierungen werden unter diesen Belegungen interpretiert.

Von Universen erweiternden verschiedene Updates (Aktualisierungen im ursprünglichen Sinne) berühren die die Universen beschreibenden Prädikate nichtund benutzen auch keine Erweiterungsbezeichner.

Tatsächlich brauchen wir uns nicht um die Belegungen von den Erweiterungsvariablen zu kümmern, denn da die Bezeichner in eineindeutig Weise verwendet werden, spielt die Interpretation keine Rolle. Jede Belegung ist eine isomorphe Struktur. Unter der Konvention, sind nebenläufige Erweiterungen unabhängig.

In einer das Modell erweiternden Aktualisierung erscheint einer Variable das erste mal in unserer Terminologie. Wir werden im weiteren häufig freie Variablen in zweierlei Hinsicht benutzen.

Bezeichner, die mit Großbuchstaben beginnen, verwenden wir als abkürzende Schreibweise für eine endliche Familie von Regeln. Beispielsweise kürzt

$$\text{IF } \ldots a = (X, Y) \ldots \text{ THEN } \ldots X \ldots Y \ldots$$

die Regel

$$\text{IF } \ldots a = \Pi(a) \ldots \text{ THEN } \ldots \pi_1(a) \ldots \pi_2(a) \ldots$$

ab. Wir sparen uns so viele Selektoren explizit zu schreiben.

Wir benützen kleingeschriebene Variabelbezeichner im Kontext von Ausdrücken, die mit Universen direkt in Beziehung stehen (beispielsweise $x \in S$). Da dynamische Universen immer endlich sind soll eine solche Variable die (endlich vielen) die Instanz einer dieser Werte aus den Universen (im Beispiel $x = s_1, \ldots, s_n \in S$) sein.