

Institut für Formale Methoden der Informatik
Abteilung Theoretische Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D-70569 Stuttgart

Diplomarbeit Nr. 2823

Fragmente einer Intervall-Logik

Alexander Lauser

Studiengang: Informatik
Prüfer: Prof. Dr. Volker Diekert
Betreuer: Dr. Manfred Kufleitner

begonnen am: 26. September 2008
beendet am: 27. März 2009

CR-Klassifikation: F.4.1, F.4.3

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Dr. Manfred Kufleitner danken, der sich während dieser Arbeit stets als geduldiger und hervorragender Betreuer erwiesen hat – selbst bei zeitweiliger Weigerung meinerseits, zu verstehen was er erklärte. Speziell möchte ich Herrn Dr. Kufleitner für die zur Verfügungstellung seiner Manuskripte für das Algebraeinführungskapitel danken. Ganz herzlich danke ich meiner Mutter Erne Lauser, meinem Bruder Andreas Lauser, sowie Pia Wolfer und Raphael Wolfer, die sich unermüdlich durch den Wust an unbekanntem Zeichen gekämpft haben. Mein ganz besonderer Dank gilt schließlich Sonja Mannhardt für ihre fortwährende moralische Unterstützung und ohne die ich nicht wäre, was ich bin.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Algebraische Grundlagen	9
2.1	Green'sche Relationen	9
2.2	Varietäten	14
2.2.1	Gleichungsbeschreibung für eine Varietät	15
2.2.2	Relationale Morphismen und das Mal'cev-Produkt	17
2.3	Sprachvarietäten	19
2.4	Beispiele für Varietäten	20
2.5	Die Varietät DA	23
2.6	Der Verband der Untervarietäten von B	29
3	Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k	31
3.1	Ein Kongruenzensystem für $\mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{V}$	33
3.2	Familien von Kongruenzen $\triangleright_{k,n}$ und $\triangleleft_{k,n}$	35
3.3	Charakterisierungen der Hierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k	38
3.4	Hierarchien unterhalb von DA	45
3.5	Zusammenhang zu Band-Varietäten	47
3.6	Alternative Familie von Kongruenzen	49
4	Fragmente einer Intervalllogik	51
4.1	Die Intervalllogik UITL	51
4.2	Die Lage von UITL_k in der Alternierungshierarchie	55
5	Zusammenfassung und Ausblick	61
6	Algebraische Strukturen und formale Sprachen	63
6.1	Relationen und Funktionen	63
6.2	Halbgruppen, Monoide und Gruppen	65
6.3	Homomorphismen, Quotienten, Unterstrukturen und Kongruenzen	66
6.4	Formale Sprachen	68

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit werden zwei Alternierungshierarchien von Varietäten unterhalb der Varietät **DA** untersucht. Es werden verschiedene Charakterisierungen für die Zugehörigkeit zu einer Ebene in diesen Hierarchien bewiesen. Unter anderem werden neben bekannten Charakterisierungen über Kongruenzen und sogenannte Mal'cev-Produkte zwei neue Beschreibungen durch Gleichungen gezeigt.

Darüber hinaus werden die Intervalllogik UITL und verschiedene Fragmente davon eingeführt und gezeigt, dass die Ebenen in den Alternierungshierarchien zu je einem Fragment von UITL korrespondieren, in der Art, dass eine Sprache genau dann durch eine Formel in diesem Fragment definierbar ist, wenn das syntaktische Monoid der Sprache zu der korrespondierenden Ebene in den Alternierungshierarchien gehört.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt jedoch auf algebraischen Untersuchungen. Die Struktur der vorliegenden Arbeit ist wie folgt: In Kapitel 2 werden die notwendigen algebraischen Grundlagen gegeben. Es werden die klassischen Green'schen Relationen über Monoiden eingeführt und einige wichtige Lemmata bewiesen. In Abschnitt 2.2 werden Varietäten, bestimmte Klassen endlicher Monoide und Halbgruppen, eingeführt. Es wird gezeigt, dass sich Varietäten durch Gleichungen beschreiben lassen, die für ihre Elemente gelten müssen. Des Weiteren wird das Mal'cev-Produkt auf Varietäten eingeführt. Danach werden Beispiele für Varietäten gegeben und einige für diese Arbeit wichtige Aussagen bewiesen. Dabei wird in Abschnitt 2.5 speziell auf die Varietät **DA** eingegangen, die eine Vielzahl an verschiedenartigen Charakterisierungen hat, von denen einige bewiesen werden. Das Kapitel schließt mit Abschnitt 2.6, der eine bekannte Hierarchie unterhalb der sogenannten Band-Monoide anführt, die, wie sich im darauf folgenden Kapitel zeigen wird, Rückschlüsse auf die Alternierungshierarchien gestatten.

In Kapitel 3 werden zunächst die Alternierungshierarchien über Gleichungsbeschreibungen eingeführt. Abschnitt 3.1 behandelt ein Kongruenzensystem nach [HW99], das

im Verlauf des weiteren Textes häufig benötigt wird. Der darauf folgende Abschnitt führt zwei Familien von Kongruenzen nach [KIW08] ein.

Abschnitt 3.3 beweist das Hauptresultat dieser Arbeit: Vier unterschiedliche äquivalente Charakterisierungen zur Zugehörigkeit eines Monoids zu einer Hierarchieebene, sowie eine nicht-triviale Gleichung für den Schnitt der beiden Hierarchien ab Ebene drei. Daran anschließend klärt Abschnitt 3.4 den engen Zusammenhang der beiden Hierarchien untereinander, sowie zur Varietät **DA**. In Abschnitt 3.5 wird sich eine weitere Beschreibung der Hierarchien als Korollar ergeben: Die Elemente der Alternierungshierarchie sind die maximalen Varietäten eines Intervalls, das durch die Projektion auf die oben erwähnte Band-Hierarchie induziert wird. In Abschnitt 3.6 führen wir zwei alternative Familien von Kongruenzen ein, die bis auf die unterste Ebene die selben Hierarchien erzeugen.

Kapitel 4 führt zunächst die Intervalllogik UITL und die für diese Arbeit interessanten Fragmente von UITL ein. Es wird eine Definition der Syntax und der Semantik von UITL gegeben. Anschließend klärt Abschnitt 4.2 die Lage der Sprachen in den Alternierungshierarchien, die durch Formeln in den Fragmenten definierbar sind.

Im Anhang in Kapitel 6 werden grundlegende Begriffe der Algebra, der Halbgruppentheorie und der Theorie der formalen Sprachen eingeführt.

Kapitel 2

Algebraische Grundlagen

Dieses Kapitel führt in die Grundlagen der Algebra ein, setzt aber die Kenntnis einiger Begriffe voraus, die größtenteils im Anhang in Kapitel 6 zu finden sind. Es werden zunächst die sogenannten Green'schen Relationen definiert, mit deren Hilfe sich viele Eigenschaften von Halbgruppen und Monoiden charakterisieren lassen. Danach werden in Abschnitt 2.2 Halbgruppenvarietäten und Monoidvarietäten eingeführt. Diese sind spezielle Klassen von Halbgruppen bzw. Monoiden, die eine direkte Korrespondenz zu bestimmten Klassen von Sprachen haben. Diese Klassen von Sprachen sind sogenannte Sprachvarietäten, die in Abschnitt 2.3 eingeführt werden. Schließlich werden noch einige Beispiele für Varietäten behandelt.

2.1 Green'sche Relationen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst einige grundlegende Relationen über Monoiden einführen, die erstmals 1951 von Green untersucht wurden und seither Standard in der Strukturtheorie der Halbgruppen und Monoide sind.

Wir definieren folgende drei Äquivalenzrelationen, die wir Green'sche Relationen nennen.

Definition 2.1. Sei M ein Monoid. Für $x, y \in M$

$$\begin{array}{lll} x \mathcal{R} y & \text{genau dann, wenn} & xM = yM \\ x \mathcal{L} y & \text{genau dann, wenn} & Mx = My \\ x \mathcal{J} y & \text{genau dann, wenn} & MxM = MyM \end{array}$$

Darauf aufbauend definieren wir eine vierte Green'sche Äquivalenzrelation über M als $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, das heißt für $x, y \in M$

$$x \mathcal{H} y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \mathcal{R} y \text{ und } x \mathcal{L} y$$

Außerdem definieren wir folgende Quasiordnungen:

Definition 2.2. Sei M ein Monoid. Für $x, y \in M$

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{R}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad xM \subseteq yM \\ x \leq_{\mathcal{L}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad Mx \subseteq My \\ x \leq_{\mathcal{J}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad MxM \subseteq MyM \\ x \leq_{\mathcal{H}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad x \leq_{\mathcal{R}} y \text{ und } x \leq_{\mathcal{L}} y \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass für eine Green'sche Relation $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}\}$ genau dann $x \mathcal{G} y$ gilt, wenn $x \leq_{\mathcal{G}} y$ und $y \leq_{\mathcal{G}} x$. Also ist \mathcal{G} die durch $\leq_{\mathcal{G}}$ induzierte Äquivalenzrelation. Außerdem schreiben wir wie üblich $x \not\mathcal{G} y$ für $\neg(x \mathcal{G} y)$ und $x \geq_{\mathcal{G}} y$ für $y \leq_{\mathcal{G}} x$, sowie $x <_{\mathcal{G}} y$ für $x \leq_{\mathcal{G}} y$ und $x \not\mathcal{G} y$.

Folgendes Lemma liefert eine Interpretation von $\leq_{\mathcal{R}}$, $\leq_{\mathcal{L}}$ und $\leq_{\mathcal{J}}$ als Präfix, Suffix und Faktor.

Lemma 2.3. Sei M ein Monoid und $x, y \in M$, dann

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{R}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad \exists u \in M: x = yu \\ x \leq_{\mathcal{L}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad \exists v \in M: x = vy \\ x \leq_{\mathcal{J}} y & \quad \text{genau dann, wenn} & \quad \exists u, v \in M: x = v y u \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage, die anderen Aussagen gelten aufgrund einer analogen Schlussweise. Sei zunächst x, y in M mit $xM \subseteq yM$, das heißt für alle $xv \in xM$ existiert ein $yu \in yM$, sodass $xv = yu$. Insbesondere folgt mit $v = 1$ die Identität $x = yu$. Sei umgekehrt $x = yu$ und $v \in M$. Da Gleichheit eine Kongruenz ist, folgt $xv = yuv$ und mit $uv \in M$ schließlich $xv \in yM$. \square

Das heißt es ist $x \leq_{\mathcal{R}} y$ genau dann, wenn y ein Präfix von x ist und entsprechend $x \leq_{\mathcal{L}} y$ genau dann, wenn y ein Suffix von x ist. Weiterhin bedeutet $x \leq_{\mathcal{J}} y$, dass y ein beliebiger Faktor von x ist. Die entsprechenden Äquivalenzrelationen drücken aus, dass die beiden Elemente die entsprechende Bedingung gegenseitig erfüllen, also beispielsweise $x \mathcal{R} y$, falls y ein Präfix von x und x ein Präfix von y ist.

Beispiel 2.4. Mit den vorhergehenden Erläuterungen ist sofort eingängig, dass die Green'sche Relationen für das freie Monoid Γ^* über einem Alphabet Γ zur Identität entarten.

Wir werden nun zeigen, dass die Relationen \mathcal{R} und \mathcal{L} kommutieren. Dies wird zur Definition einer fünften Green'schen Relation führen.

Lemma 2.5. *Sei M ein Monoid, dann gilt $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$.*

Beweis. Sei $x (\mathcal{R}\mathcal{L}) y$, das heißt es gibt ein $u \in M$ mit $x \mathcal{R} u$ und $u \mathcal{L} y$. Damit gibt es in M Elemente p, q, r und s mit

$$\begin{aligned} x &= up & y &= ru \\ u &= xq & u &= sy \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass mit $v = rx$ die Äquivalenzen $x \mathcal{L} v$ und $v \mathcal{R} y$ erfüllt sind und damit $x (\mathcal{L}\mathcal{R}) y$ ist. Es gilt $x = up = syp = srup = sr x = sv$ und damit $x \leq_{\mathcal{L}} v$. Aus der Definition von v ist sofort $v \leq_{\mathcal{L}} x$ ersichtlich, deshalb $x \mathcal{L} v$. Aus $y = ru = rxq = vq$ schließen wir $y \leq_{\mathcal{R}} v$. Andererseits gilt $v = rx = rup = yp$ und deshalb $v \leq_{\mathcal{R}} y$ und damit $v \mathcal{R} y$. Die umgekehrte Inklusion lässt sich analog dazu zeigen. \square

Definition 2.6. Sei M ein Monoid. Für $x, y \in M$

$$\begin{aligned} x \mathcal{D} y & \text{ genau dann, wenn } \exists u \in M: x \mathcal{R} u \text{ und } u \mathcal{L} y \\ & \text{ genau dann, wenn } \exists u \in M: x \mathcal{L} u \text{ und } u \mathcal{R} y \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.5 ist \mathcal{D} wohldefiniert und es gilt $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$, wobei $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ die kleinste Äquivalenzrelation ist, die sowohl \mathcal{R} als auch \mathcal{L} umfasst, siehe [How95].

Gelegentlich verwenden wir für $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}, \mathcal{D}\}$ und x in M die Notation \mathcal{G}_x für die Äquivalenzklasse von x bezüglich der Green'schen Relation \mathcal{G} .

Indem wir in der Definition von $\leq_{\mathcal{J}}$ entweder u oder q auf das neutrale Element in M setzen, erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma 2.7. *Sei M ein Monoid und $x, y \in M$, dann gilt*

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{R}} y & \Rightarrow x \leq_{\mathcal{J}} y \\ x \leq_{\mathcal{L}} y & \Rightarrow x \leq_{\mathcal{J}} y \end{aligned}$$

Korollar 2.8. *Sei M ein Monoid und $x, y \in M$, dann gilt*

$$\begin{aligned} x \mathcal{R} y & \Rightarrow x \mathcal{J} y \\ x \mathcal{L} y & \Rightarrow x \mathcal{J} y \\ x \mathcal{D} y & \Rightarrow x \mathcal{J} y \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind eine direkte Konsequenz aus vorigem Lemma. Da \mathcal{D} aber die kleinste Äquivalenzrelation ist, die sowohl \mathcal{R} , als auch \mathcal{L} umfasst, folgt $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. \square

Für endliche Monoide können wir mehr zeigen: Wie das nächste Lemma zeigt, gilt für endliche Monoide auch die Umkehrung der letzten Aussage des Korollars und die Relationen \mathcal{D} und \mathcal{J} stimmen überein.

Lemma 2.9. *Sei M ein endliches Monoid, dann gilt $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Beweis. Es verbleibt noch die Inklusion $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$ zu zeigen. Sei dazu $x \mathcal{J} y$ mit

$$\begin{aligned} x &= u y v \\ y &= p x q \end{aligned}$$

für u, v, p und q in M . Damit erhalten wir $x = up x qv$ und induktiv $x = (up)^\omega x (qv)^\omega$. Da M endlich ist, ist dieser Ausdruck wohldefiniert für eine Zahl $\omega \geq 1$. Damit und mit der Idempotenz des linken und rechten ω -Faktors erhalten wir wiederum

$$x = x(qv)^\omega \tag{2.1}$$

$$x = (up)^\omega x \tag{2.2}$$

und wir zeigen, dass $x \mathcal{R} xq$ und $xq \mathcal{L} y$ und damit die Behauptung gilt. Es ist trivialerweise $xq \leq_{\mathcal{R}} x$. Weiterhin ist mit Gleichung (2.1) $xq v(qv)^{\omega-1} = x(qv)^\omega = x$ und damit $xq \geq_{\mathcal{R}} x$. Anhand der Faktorisierung $y = p xq$ sehen wir $y \leq_{\mathcal{L}} xq$. Unter Ausnutzung von Gleichung (2.2) folgt $(up)^{\omega-1} u y = (up)^{\omega-1} up xq = (up)^\omega xq = xq$ und damit die verbleibende Richtung $y \geq_{\mathcal{L}} xq$. \square

An dem Beweis sehen wir, dass das Lemma allgemeiner für alle Monoide gilt, für die jedes Element eine idempotente Potenz besitzt. Wir fassen zusammen:

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \subseteq \begin{matrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{L} \end{matrix} \subseteq \mathcal{R} \vee \mathcal{L} = \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$$

wobei die letzte Inklusion für endliche Monoide eine Gleichheit ist.

Das folgende Lemma fasst einige nützliche Eigenschaften zusammen, die wir später benötigen werden.

Lemma 2.10. *Sei M ein endliches Monoid. Dann sind folgende Aussagen für x, y und $e^2 = e$ in M wahr:*

1. $x \leq_{\mathcal{R}} e \Leftrightarrow x = ex$
2. $x \leq_{\mathcal{L}} e \Leftrightarrow x = xe$

$$3. x \leq_{\mathcal{R}} y, x \mathcal{J} y \Rightarrow x \mathcal{R} y$$

$$4. x \leq_{\mathcal{L}} y, x \mathcal{J} y \Rightarrow x \mathcal{L} y$$

Beweis. Aussage 1: Sei zunächst $x \leq_{\mathcal{R}} e$, das heißt es gibt ein u in M , sodass $x = eu$. Da e idempotent ist gilt nun $x = eeu = ex$. Die Umkehrung gilt trivialerweise und die Aussage 2 folgt analog.

Wir zeigen Aussage 3: Seien x, y in M mit $x \leq_{\mathcal{R}} y$ und $y \leq_{\mathcal{J}} x$, das heißt es gibt Elemente u, v und w in M , sodass $x = yu$ und $y = vxw$. Damit erhalten wir $y = vxw = y = vyuw$ und induktiv $y = v^{\omega}y(uw)^{\omega}$. Da $(uw)^{\omega}$ idempotent ist, gilt auch $y = v^{\omega}y(uw)^{\omega}(uw)^{\omega} = y(uw)^{\omega}$. Anhand der Faktorisierung $y = yuw(uw)^{\omega-1}$ ist nun $y \leq_{\mathcal{R}} x$ ersichtlich, da $x = yu$. Aussage 4 folgt durch einen analogen Schluss. \square

Es sei angemerkt, dass die Aussagen 1 und 2 in Lemma 2.10 aufgrund des selben Beweises auch für unendliche Monoide gelten.

Proposition 2.11. *Sei M ein endliches Monoid. Dann sind die folgende beiden Aussagen äquivalent für x, y und in M :*

$$1. xy \in \mathcal{R}_x \cap \mathcal{L}_y$$

$$2. \text{Es gibt ein Idempotentes } e \in M \text{ mit } e \in \mathcal{L}_x \cap \mathcal{R}_y$$

Beweis. „1 \Rightarrow 2“: Zunächst gibt es wegen $x \leq_{\mathcal{R}} xy$ ein $u \in M$ mit $x = xyu$, deshalb gilt induktiv $x = x(yu)^{\omega}$. Wir zeigen, dass $e = (yu)^{\omega}$ der Aussage in 2 genügt. Offensichtlich ist e idempotent. Da $x \mathcal{R} xy \mathcal{L} y$ gilt $x \mathcal{D} y$ und mit Korollar 2.8 folgt $x \mathcal{J} y$. An $x = xe$ sehen wir $x \leq_{\mathcal{L}} e$ und $x = x \leq_{\mathcal{J}} e \leq_{\mathcal{J}} y$, also $x \mathcal{J} e \mathcal{J} y$. Aus $e = yu(yu)^{\omega-1}$ folgt $e \leq_{\mathcal{R}} y$ und zusammen mit Punkt 3 und 4 von Lemma 2.10 ergibt sich $x \mathcal{L} e \mathcal{R} y$.

„2 \Rightarrow 1“: Sei $e = e^2$ mit $x \mathcal{L} e \mathcal{R} y$. Damit ist nach Lemma 2.10 (2) $x = xe$ und gibt es u, v in M mit $e = ux$ und $e = yv$. Damit ist $e = ee = uxyv$ und es folgt $e \leq_{\mathcal{J}} xy$. Desweiteren ist $xy = xey$ und damit $xy \leq_{\mathcal{J}} e$. Es ist $x \geq_{\mathcal{R}} xy \leq_{\mathcal{L}} y$ trivialerweise erfüllt und mit Lemma 2.10 folgt erneut $x \mathcal{R} xy \mathcal{L} y$. \square

Korollar 2.12. *Sei M ein endliches Monoid und H eine \mathcal{H} -Klasse von M , dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$1. \text{Es gibt ein idempotentes Element } e \in H.$$

$$2. \text{Es gibt } x, y \in H \text{ mit } xy \in H.$$

$$3. H \text{ ist eine maximale Untergruppe von } M.$$

Beweis. Die Implikationen „ $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ “ gelten trivialerweise: Ist H eine Untergruppe, dann ist das neutrale Element von H idempotent. Existiert ein idempotentes $e \in H$, dann folgt $ee = e \in H$. Es verbleibt die Folgerung „ $2 \Rightarrow 3$ “ zu zeigen und es seien $x, y \in H$ mit $xy \in H$. Da $H = \mathcal{R}_x \cap \mathcal{L}_y$ ist, folgt mit Proposition 2.11, dass es ein Idempotentes $e \in \mathcal{L}_x \cap \mathcal{R}_y = H$ gibt. Seien $u, v \in H$, dann gilt wegen $e \in \mathcal{L}_u \cap \mathcal{R}_v$ erneut mit Proposition 2.11 $uv \in \mathcal{R}_u \cap \mathcal{L}_v = H$ und H ist abgeschlossen unter Multiplikation. Weiterhin gilt $u \mathcal{R} e$ sowie $u \mathcal{L} e$. Mit Lemma 2.10 folgt $eu = u$ und $ue = u$ und e ist ein neutrales Element in H .

Da $u \mathcal{H} e$ gibt es ein $u' \in M$ mit $u'u = e$. Außerdem können wir annehmen, dass gilt $u' = eu'e$, denn ist $e = u''u$, dann folgt mit der Idempotenz von e und der Eigenschaft $eu = u$, dass gilt $e = ee = eu''u = eu''eu$. Mit $u' = eu''e$ erfüllt u' die Behauptung. Nach Lemma 2.10 (2) und $u' = u'e$ folgt $u' \leq_{\mathcal{L}} e$. Mit $u'u = e$ ergibt sich $e \leq_{\mathcal{R}} u'$ und mit den Punkten 3 und 4 von Lemma 2.10 folgt schließlich $u' \mathcal{L} e \mathcal{R} u'$. Damit ist u' ein linksinverses Element in H von u und damit H eine Gruppe. Sei $G \subseteq M$ eine Gruppe, die e enthält, und $x \in G$. Dann gilt $e = x^{-1}x$, $x = xe$ also $x \mathcal{L} e$. Analog gilt $x \mathcal{R} e$ und x ist \mathcal{H} -äquivalent zu e . \square

Eine \mathcal{D} -Klasse heißt *regulär*, falls sie ein idempotentes Element enthält.

Lemma 2.13. *Sei M ein endliches Monoid und D eine \mathcal{D} -Klasse von M . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. D ist regulär
2. D enthält in jeder \mathcal{R} -Klasse ein idempotentes Element
3. D enthält in jeder \mathcal{L} -Klasse ein idempotentes Element
4. D enthält Elemente x und y mit $xy \in D$

Beweis. „ $1 \Rightarrow 2$ “: Sei $x \mathcal{L} e$. Wir zeigen, dass es ein $f \in \mathcal{R}_x$ mit $f^2 = f$ gibt. Wegen $x \leq_{\mathcal{L}} e$ gilt nach Lemma 2.10 (2) $x = xe$ und da $e \leq_{\mathcal{L}} x$, gibt es ein $z \in M$ mit $e = zx$. Wir setzen $f = xz$. Mit $f^2 = xzxz = xez = xz = f$ ist f idempotent. Außerdem gilt $fx = xzx = xe = x$ und damit $f \mathcal{R} x$. Die Implikation „ $1 \Rightarrow 3$ “ lässt sich analog dazu zeigen und die Richtungen „ $2 \Rightarrow 4$ “, sowie „ $3 \Rightarrow 4$ “ gelten trivialerweise. Die Aussage „ $4 \Rightarrow 1$ “ folgt schließlich aus Proposition 2.11. \square

2.2 Varietäten

Dieser Abschnitt führt sogenannte Halbgruppenvarietäten und Monoidvarietäten ein, spezielle Klassen endlicher Halbgruppen und Monoide, die bestimmte Abschlusseigenschaften erfüllen müssen. Der Name stammt wurde in Analogie zu Varietäten in der

Universellen Algebra gewählt, da sich Halbgruppenvarietäten und Monoidvarietäten wie wir sehen werden durch Gleichungen beschreiben lassen.

Definition 2.14. Eine Klasse von Monoiden \mathbf{V} heißt *Monoidvarietät*, falls \mathbf{V} den folgenden drei Bedingungen genügt:

1. Ist N ein Quotient von M und M in \mathbf{V} , dann ist N in \mathbf{V} .
2. Ist N ein Untermonoid von M und M in \mathbf{V} , dann ist N in \mathbf{V} .
3. Sind M_1, M_2, \dots, M_n Monoide in \mathbf{V} , dann ist auch $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \in \mathbf{V}$.

Eine Klasse von Halbgruppen \mathbf{V} heißt *Halbgruppenvarietät*, falls \mathbf{V} den folgenden drei Bedingungen genügt:

1. Ist N ein Quotient von M und M in \mathbf{V} , dann ist N in \mathbf{V} .
2. Ist N eine Unterhalbgruppe von M und M in \mathbf{V} , dann ist N in \mathbf{V} .
3. Sind M_1, M_2, \dots, M_n Halbgruppen in \mathbf{V} , dann ist auch $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \in \mathbf{V}$.

Wir lassen dabei in Punkt 3 der Definition auch das leere Produkt für $n = 0$ zu und vereinbaren in diesem Fall $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{1\}$, das heißt jede Monoidvarietät enthält das triviale Monoid $\{1\}$ und jede Halbgruppenvarietät enthält die triviale Halbgruppe $\{1\}$.

Wir werden meist Monoidvarietäten benutzen, vereinzelt aber auch Halbgruppenvarietäten benötigen. Wir schreiben auch kurz *Varietät*, wenn klar ist welche Art von Varietät gemeint ist. Die Bedingungen bedeuten, dass \mathbf{V} eine Varietät ist, falls \mathbf{V} abgeschlossen unter der Bildung von Quotienten, Untermonoiden (beziehungsweise Unterhalbgruppen) und endlichen direkten Produkten ist. Die ersten beiden Punkte zusammen sind äquivalent zu der Forderung, dass \mathbf{V} abgeschlossen unter der Bildung von Divisoren ist. In der Literatur ist ebenfalls der Begriff *Pseudovarietät* gebräuchlich. Dies soll betonen, dass lediglich ein Abschluss unter *endlichen* direkten Produkten gefordert wird – im Gegensatz zu einer Varietät im Sinne der Universellen Algebra.

2.2.1 Gleichungsbeschreibung für eine Varietät

Sei $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{x, y, z\}$ ein abzählbar unendliches Alphabet an Variablen. Für Wörter $u, v \in \Omega^*$ definieren wir eine *formale Gleichung* als $u = v$ und sagen, dass ein Monoid M diese Gleichung *erfüllt*, falls $\varphi(u) = \varphi(v)$ für alle Homomorphismen $\varphi: \Omega^* \rightarrow M$ gilt. Anschaulich heißt das, dass wir die Variablen mit beliebigen Werten in M belegen können und stets eine Identität erhalten, wenn wir mit diesen Werten die Gleichung $u = v$ in M überprüfen. Außerdem sagen wir dann auch, die Gleichung $u = v$ *gilt in M* .

Wir bezeichnen mit $\Omega_k = \{x_i \in \Omega \mid 1 \leq i \leq k\}$ die Restriktion von Ω auf die ersten k Variablen. Kommen in einer formalen Gleichung nicht mehr als drei Variablen vor, verwenden wir meist x, y und z anstatt x_1, x_2 und x_3 .

Beispiel 2.15. Jedes kommutative Monoid erfüllt die Gleichung $xy = yx$. Andererseits ist jedes Monoid, das diese Gleichung erfüllt kommutativ. Die Gleichung $xx = x$ ist genau für diejenigen Monoide erfüllt, für die jedes Element idempotent ist.

Ist eine endliche Menge $u_1 = v_1$ bis $u_n = v_n$ an Gleichungen gegeben, dann schreiben wir $\llbracket u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n \rrbracket$ für die Klasse aller endlichen Monoide, in denen diese Gleichungen gelten. Wie das folgende Lemma zeigt, bildet eine solche Klasse eine Monoidvarietät.

Lemma 2.16. *Seien $n \geq 1$ und $u_1 = v_1$ bis $u_n = v_n$ formale Gleichungen, dann ist $\mathbf{V} = \llbracket u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n \rrbracket$ eine Monoidvarietät.*

Ein Beweis für diese Lemma, findet sich, wie auch für die restlichen unbewiesenen Aussagen in diesem Unterabschnitt, in [Pin86]. Die Umkehrung gilt in einem gewissen Sinne auch. Um dies präzisieren zu können, benötigen wir jedoch noch einige Begriffe. Seien $(u_i)_{i \geq 1}$ und $(v_i)_{i \geq 1}$ Sequenzen von Wörtern in Ω^* . Die Sequenz von Gleichungen $(u_i = v_i)_{i \geq 1}$ wird von einem Monoid M *ultimativ erfüllt*, falls es einen Index $j \geq 1$ gibt, sodass M alle Gleichungen $u_i = v_i$ für $i \geq j$ erfüllt, das heißt M muss alle Gleichungen bis auf endlich viele Ausnahmen erfüllen. Die Klasse \mathbf{V} aller Monoide, die die Gleichungen $(u_i = v_i)_{i \geq 1}$ ultimativ erfüllen, heißt *ultimativ definiert* durch die Gleichungen und wir schreiben $\mathbf{V} = \llbracket (u_i = v_i)_{i \geq 1} \rrbracket$.

Zunächst können wir obiges Lemma auf diese neuen Begriffe übertragen:

Lemma 2.17. *Seien $(u_i = v_i)_{i \geq 1}$ formale Gleichungen, dann ist $\mathbf{V} = \llbracket (u_i = v_i)_{i \geq 1} \rrbracket$ eine Monoidvarietät.*

Mit dem folgenden Theorem von Eilenberg und Schützenberger [ES76] gilt nun auch die Umkehrung.

Theorem 2.18. *Jede Monoidvarietät kann durch eine Sequenz von Gleichungen ultimativ definiert werden.*

Wichtig ist für uns vor allem die folgende Erweiterung der obigen Schreibweise um ω -Potenzen, von der wir in dieser Arbeit häufigen Gebrauch machen werden. Enthält in einer Sequenz $(u_i = v_i)_{i \geq 1}$ von Gleichungen die i -te Gleichung $u_i = v_i$ ω -Potenzen, dann ersetzen wir in diesen Gleichungen alle Vorkommen von ω durch $i!$ und interpretieren die so entstandenen Wörter u'_i und v'_i über Ω als Gleichung $u'_i = v'_i$. Damit können wir in einer Gleichung den Term x^ω als das eindeutige, von der Belegung von x erzeugte idempotente Element interpretieren.

Beispiel 2.19. Aufgrund dieser Konvention identifizieren wir zum Beispiel $\llbracket x^\omega y = x^\omega \rrbracket$ mit der Varietät $\llbracket (x^i y = x^i)_{i \geq 1} \rrbracket$, das heißt die Klasse aller Monoide, sodass für jedes Idempotente e und jedes Element x die Gleichung $ex = e$ gilt.

Sind \mathbf{V} und \mathbf{W} zwei Varietäten mit $\mathbf{V} = \llbracket v = v' \rrbracket$ und $\mathbf{W} = \llbracket w = w' \rrbracket$ für $v, v', w, w' \in \Omega^*$, dann ist der Schnitt von \mathbf{V} und \mathbf{W} gegeben durch $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \llbracket v = v', w = w' \rrbracket$. Außerdem vereinbaren wir die Schreibweise $\llbracket u = v \rrbracket_{\mathbf{V}}$ für $\llbracket u = v \rrbracket \cap \mathbf{V}$.

Es lässt sich zeigen, dass auch der Schnitt einer potentiell unendlichen Menge an Varietäten wieder eine Varietät bildet. Deshalb bildet die Menge aller Varietäten einen vollständigen Verband unter der Inklusion und es gibt zu jeder Menge an Varietäten eine eindeutige kleinste Varietät, die diese Menge umfasst. Wir nennen diese eindeutig bestimmte kleinste Varietät den *Join* der gegebenen Menge. Speziell schreiben wir $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ für den Join der Varietäten \mathbf{V} und \mathbf{W} .

Alle Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts lassen sich sinngemäß auch auf Halbgruppen und Halbgruppenvarietäten übertragen, dabei ist Ω^* durch Ω^+ zu ersetzen und eine Gleichung muss für alle Homomorphismen $\varphi: \Omega^+ \rightarrow M$ gelten.

2.2.2 Relationale Morphismen und das Mal'cev-Produkt

In diesem Abschnitt führen wir spezielle Relationen zwischen zwei Monoiden und Halbgruppen ein, sogenannte relationale Homomorphismen. Damit werden wir das Mal'cev-Produkt definieren, eine wichtige Operation über Varietäten.

Definition 2.20. Eine Relation $\tau: M \rightarrow N$ zwischen zwei Monoiden¹ M und N heißt *relationaler Morphismus* von M nach N , falls:

1. Für alle x in M gilt $\tau(x) \neq \emptyset$.
2. Für alle x, y in M gilt $\tau(x)\tau(y) \subseteq \tau(xy)$.
3. Es gilt $1_N \in \tau(1_M)$.

Ein *relationaler Morphismus* zwischen zwei Halbgruppen M und N muss nur die ersten beiden Punkte erfüllen.

Äquivalent zu dieser Definition können wir die Punkte auch in der relationalen Schreibweise formulieren:

1. Für alle x in M gibt es ein u in N mit $x \tau u$.

¹Zur Notation von Relationen sei auf den Anhang verwiesen, insbesondere in Hinsicht auf die „funktionale Schreibweise“ $\tau(x)$.

2. Für alle x, y in M und u, v in N mit $x \tau u$ und $y \tau v$ gilt $xy \tau uv$.
3. Es gilt $1_M \tau 1_N$.

Wir sagen auch kurz *Morphismus* ohne das Attribut „relational“. Wir halten das folgende Lemma fest:

Lemma 2.21. *Für einen Morphismus $\tau: M \rightarrow N$ zwischen zwei Halbgruppen oder Monoiden M und N , ist $\tau^{-1}(e)$ für jedes Idempotente e in N eine Unterhalbgruppe von M .*

Beweis. Dies ist mit der relationalen Schreibweise leicht zu sehen: Für $x \tau e$ und $y \tau e$ folgt $xy \tau ee = e$. □

Dabei ist zu beachten, dass $\tau^{-1}(e)$ im Allgemeinen „nur“ eine Unterhalbgruppe von M ist, auch wenn M und N Monoide sind. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 2.22. Sei \mathbf{W} eine Halbgruppenvarietät. Ein Morphismus $\tau: M \rightarrow N$ heißt *\mathbf{W} -Morphismus*, falls $\tau^{-1}(e) \in \mathbf{W}$ für alle Idempotenten $e \in N$ gilt.

Für eine Halbgruppenvarietät (oder Monoidvarietät) \mathbf{V} und eine Halbgruppenvarietät \mathbf{W} ist das *Mal'cev-Produkt* von \mathbf{W} mit \mathbf{V} , in Zeichen $\mathbf{W} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}$, die Klasse aller endlichen Halbgruppen (oder Monoide) M , für die ein \mathbf{W} -Morphismus $\tau: M \rightarrow N$ für ein $N \in \mathbf{V}$ existiert.

Es ist zu beachten, dass die Definition nur für Halbgruppenvarietäten \mathbf{W} erklärt ist, da die Forderung, dass $\tau^{-1}(e)$ ein Monoid ist, im Allgemeinen nicht sinnvoll ist. Das Mal'cev-Produkt kann auch für allgemeine Klassen von Halbgruppen beziehungsweise Monoiden definiert werden. Sind \mathbf{V} und \mathbf{W} jedoch Varietäten, dann gilt die folgende Aussage, die in [Pin86] bewiesen wird.

Lemma 2.23. *Für jede Varietät \mathbf{V} und jede Halbgruppenvarietät \mathbf{W} ist $\mathbf{W} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}$ eine Varietät.*

Lemma 2.24. *Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}$ Varietäten und $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V} &\subseteq \mathbf{W} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}, \\ \mathbf{V} \textcircled{\text{m}} \mathbf{Q} &\subseteq \mathbf{V} \textcircled{\text{m}} \mathbf{W} \text{ und} \\ \mathbf{V} &\subseteq \mathbf{W} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Beweis. Der erste Punkt folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass für $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$ jeder \mathbf{Q} -Morphismus auch ein \mathbf{W} -Morphismus ist. Ist weiterhin M ein Monoid, sodass ein \mathbf{V} -Morphismus $\tau: M \rightarrow N$ für ein $N \in \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$ existiert, dann ist τ auch ein \mathbf{V} -Morphismus auf ein Monoid in \mathbf{W} , da $N \in \mathbf{W}$ und damit folgt $M \in \mathbf{V} \textcircled{\text{m}} \mathbf{W}$. Der letzte Punkt folgt, da die Identität ein Morphismus ist, für die $\tau^{-1}(e)$ die triviale Halbgruppe ist, die in jeder Varietät enthalten ist. □

Außerdem führen wir das folgende Lemma an, für einen Beweis siehe [Pin86].

Lemma 2.25. *Sei \mathbf{V} eine Varietät, dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} (\mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}) &= \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V} \\ \mathbf{D} \textcircled{\text{m}} (\mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}) &= \mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}. \end{aligned}$$

2.3 Sprachvarietäten

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es eine direkte gegenseitige Entsprechung bestimmter Klassen von Sprachen mit Varietäten gibt.

Wir schreiben $a^{-1}L$ für den *Quotienten von links* einer Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ mit dem Buchstaben $a \in \Gamma$ und definieren $a^{-1}L = \{u \in \Gamma^* \mid au \in L\}$. Entsprechend ist der *Quotient von rechts* von $L \subseteq \Gamma^*$ mit $a \in \Gamma$ definiert durch $La^{-1} = \{u \in \Gamma^* \mid ua \in L\}$. Wir schreiben auch verkürzend *Quotient*, falls wir einen Quotienten von links oder von rechts meinen.

Für Quotienten gelten folgende Rechenregeln, die wir jedoch nicht beweisen.

Lemma 2.26. *Sei Γ ein Alphabet, $L, L' \subseteq \Gamma^*$ und $a \in \Gamma$, dann gelten folgenden Aussagen:*

1. $a^{-1}(L \cup L') = a^{-1}L \cup a^{-1}L'$
2. $a^{-1}(L \setminus L') = a^{-1}L \setminus a^{-1}L'$
3. $a^{-1}\Gamma^* = \Gamma^*$

Eine *Klasse von erkennbaren Sprachen* \mathcal{V} ist eine Abbildung, die jedem Alphabet Γ eine Menge $\mathcal{V}(\Gamma)$ an erkennbaren Sprachen über diesem Alphabet zuordnet.

Definition 2.27. Eine *Sprachvarietät* \mathcal{V} ist eine Klasse von erkennbaren Sprachen, sodass die folgenden Bedingungen für alle Alphabete Σ und Γ erfüllt sind:

1. $\mathcal{V}(\Gamma)$ ist eine boolesche Algebra.
2. Ist $L \in \mathcal{V}(\Gamma)$ und $\varphi: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ ist ein Homomorphismus, dann gilt $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(\Sigma)$.
3. Für alle $a \in \Gamma$ und $L \in \mathcal{V}(\Gamma)$ gilt $a^{-1}L \in \mathcal{V}(\Gamma)$ und $La^{-1} \in \mathcal{V}(\Gamma)$.

Mit anderen Worten bedeuten die Punkte den Abschluss unter booleschen Operationen, inversen Homomorphismen und Bildung von Quotienten. Für den Abschluss von $\mathcal{V}(\Gamma)$ unter booleschen Operationen müssen für alle $L, L' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ die Forderungen $L \cup L' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ und $\Gamma^* \setminus L \in \mathcal{V}(\Gamma)$ erfüllt sein.

Sei eine Monoidvarietät \mathbf{V} gegeben, dann ordnen wir dieser durch die folgende Definition eine Klasse von erkennbaren Sprachen \mathcal{V} zu, die wir die zu \mathbf{V} korrespondierende Klasse von erkennbaren Sprachen nennen. Diese Namensgebung wird durch das darauf folgende Theorem gerechtfertigt.

Definition 2.28. Sei \mathbf{V} eine Monoidvarietät, dann ist \mathcal{V} die zu \mathbf{V} korrespondierende Klasse von erkennbaren Sprachen, wobei \mathcal{V} einem Alphabet Γ die Menge der durch ein Monoid in \mathbf{V} erkennbaren Sprachen $L \subseteq \Gamma^*$ zuordnet.

Wie das folgende Theorem zeigt, gibt es eine natürliche Entsprechung von Monoidvarietäten und Sprachvarietäten in dem Sinn, dass es für jede Monoidvarietät \mathbf{V} eine Bijektion zwischen \mathbf{V} und \mathcal{V} gibt.

Theorem 2.29 (Eilenberg 1976). *Die Abbildung $\mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$, die einer Monoidvarietät \mathbf{V} die zu ihr korrespondierende Sprachvarietät \mathcal{V} zuordnet, ist bijektiv.*

Ein Beweis findet sich in [Eil76, Pin86]. Dieses Theorem ermöglicht beispielsweise eine Klassifizierung von formalen Sprachen durch Aussagen über ihre zugehörigen algebraischen Objekte.

2.4 Beispiele für Varietäten

Sei M ein Monoid und \mathcal{G} eine Green'sche Relation, dann sagen wir M ist \mathcal{G} -trivial, falls in M alle \mathcal{G} -Klassen nur aus einem Element bestehen, das heißt es gilt $x \mathcal{G} y \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in M$. Das Monoid M heißt *aperiodisch*, falls es zu jedem $x \in M$ ein $n \geq 1$ gibt mit $x^{n+1} = x^n$. M heißt *idempotent*, wenn alle Elemente von M idempotent sind.

Wir bezeichnen mit \mathbf{R} , \mathbf{L} und \mathbf{J} die Klassen aller endlichen Monoide, die \mathcal{R} -trivial, \mathcal{L} -trivial bzw. \mathcal{J} -trivial sind. Desweiteren ist $\mathbf{A} = \llbracket x^{\omega+1} = x^\omega \rrbracket$ die Varietät aller aperiodischen Monoide, die wie wir in Lemma 2.33 sehen werden mit der Klasse aller \mathcal{H} -trivialen Monoide identisch ist. Im Folgenden geben wir die für uns wichtigen Varietäten mit Gleichungen an. Für \mathbf{R} , \mathbf{L} und \mathbf{J} werden wir die Gleichungsbeschreibung beweisen und damit insbesondere zeigen, dass jeweils eine Varietät vorliegt. \mathbf{DS} ist dabei die Klasse aller endlichen Monoide, für die alle regulären \mathcal{D} -Klassen Halbgruppen sind. Auf \mathbf{DA} werden wir in Abschnitt 2.5 speziell eingehen. \mathbf{B} ist die Klasse aller

idempotenten Monoide, sogenannte Bands. Für die restlichen aufgeführten Varietäten benötigen wir nur die Gleichungsbeschreibung.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \llbracket x^\omega y = x^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{D} &= \llbracket yx^\omega = x^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{R} &= \llbracket (xy)^\omega x = (xy)^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{L} &= \llbracket y(xy)^\omega = (xy)^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{A} &= \llbracket x^{\omega+1} = x^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{B} &= \llbracket x^2 = x \rrbracket \\
 \mathbf{LZ} &= \llbracket xy = x \rrbracket \\
 \mathbf{RZ} &= \llbracket yx = x \rrbracket \\
 \mathbf{J} &= \llbracket (xy)^\omega x = (xy)^\omega = y(xy)^\omega \rrbracket \\
 &= \llbracket x^{\omega+1} = x^\omega, (xy)^\omega = (yx)^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{J}_1 &= \llbracket x^2 = x, xy = yx \rrbracket \\
 \mathbf{DA} &= \llbracket (xy)^\omega x (xy)^\omega = (xy)^\omega \rrbracket \\
 &= \llbracket (xy)^\omega y (xy)^\omega = (xy)^\omega \rrbracket \\
 &= \llbracket (xyz)^\omega y (xyz)^\omega = (xyz)^\omega \rrbracket \\
 \mathbf{DS} &= \llbracket ((xy)^\omega (yx)^\omega (xy)^\omega)^\omega = (xy)^\omega \rrbracket
 \end{aligned}$$

Die folgenden Lemmata stellen wichtige Eigenschaften einiger dieser Varietäten zusammen und geben in den Beweisen insbesondere Beispiele zur Verwendung der Gleichungen.

Lemma 2.30. *Es gilt $\mathbf{R} = \llbracket (xy)^\omega x = (xy)^\omega \rrbracket$ und $\mathbf{L} = \llbracket y(xy)^\omega = (xy)^\omega \rrbracket$.*

Beweis. Wir zeigen die erste Behauptung die Aussage über \mathcal{L} folgt analog. Sei M ein \mathcal{R} -triviales endliches Monoid und $x, y \in M$. Zunächst gilt $(xy)^\omega x \leq_{\mathcal{R}} (xy)^\omega$. Mit $(xy)^\omega x \cdot y(xy)^{\omega-1} = (xy)^\omega (xy)^\omega = (xy)^\omega$ folgt außerdem $(xy)^\omega x \geq_{\mathcal{R}} (xy)^\omega$. Insgesamt also $(xy)^\omega x \mathcal{R} (xy)^\omega$ und mit der \mathcal{R} -Trivialität von M folgt $(xy)^\omega x = (xy)^\omega$.

Sei für die umgekehrte Inklusion M ein endliches Monoid und $x, y \in M$ mit $x \mathcal{R} y$. Damit gibt es Elemente $u, v \in M$, sodass $x = yu$ und $y = xv$. Durch Einsetzen der zweiten Gleichung ergibt sich $x = xvu$ und damit induktiv $x = x(vu)^\omega$. Wir wenden nun die Gleichung an und erhalten $x = x(vu)^\omega v = xv = y$. \square

Lemma 2.31. *Sei M ein endliches Monoid, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $M \in \mathbf{J}$
2. $M \in \mathbf{R} \cap \mathbf{L}$
3. $M \in \llbracket (xy)^\omega x = (xy)^\omega = y(xy)^\omega \rrbracket$
4. $M \in \llbracket (xy)^\omega = (yx)^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega \rrbracket$

Beweis. Sei für die Folgerung „1 \Rightarrow 4“ M ein endliches \mathcal{J} -triviales Monoid und $x, y \in M$. Es gilt $(xy)^\omega = (xy)^\omega (xy)^\omega = x \cdot (yx)^\omega \cdot y(xy)^{\omega-1}$ und damit $(xy)^\omega \leq_{\mathcal{J}} (yx)^\omega$. Analog ergibt sich $(yx)^\omega \leq_{\mathcal{J}} (xy)^\omega$, damit $(xy)^\omega \mathcal{J} (yx)^\omega$ und schließlich $(xy)^\omega = (yx)^\omega$ da M \mathcal{J} -trivial ist. Weiterhin ist $x^\omega \geq_{\mathcal{J}} x^{\omega+1} \geq_{\mathcal{J}} x^{\omega+1} x^{\omega-1} = x^\omega$, damit $x^\omega \mathcal{J} x^{\omega+1}$ und schließlich $x^\omega = x^{\omega+1}$ erneut mit der \mathcal{J} -Trivialität von M .

Zu „4 \Rightarrow 3“: Sei M ein endliches Monoid, das die Gleichungen $(xy)^\omega = (yx)^\omega$ und $x^{\omega+1} = x^\omega$ erfüllt, dann gilt $(xy)^\omega = (yx)^\omega = (yx)^{\omega+1} = y(xy)^\omega x$. Induktiv schließen wir $(xy)^\omega = y^\omega (xy)^\omega x^\omega$. Erneutes Anwenden der zweiten Gleichung liefert $(xy)^\omega = y^\omega (xy)^\omega x^\omega x = (xy)^\omega x$. Die Gleichung $(xy)^\omega = y(xy)^\omega$ folgt analog.

Die Implikation „3 \Rightarrow 2“ gilt aufgrund von Lemma 2.30. Für den Nachweis von „2 \Rightarrow 1“ sei schließlich M ein endliches Monoid und sowohl \mathcal{R} -trivial als auch \mathcal{L} -trivial. Seien außerdem $x, y \in M$ mit $x \mathcal{J} y$. Da M endlich ist, folgt mit Lemma 2.9 $x \mathcal{D} y$ und es gibt ein $z \in M$ mit $x \mathcal{R} z \mathcal{L} y$. Damit folgt $x = z$, da M \mathcal{R} -trivial ist und $z = y$ mit der \mathcal{L} -Trivialität und schließlich $x = y$. \square

Lemma 2.32. *Sei $M \in \mathbf{A}$ und $x, y \in M$, dann folgt aus $y \leq_{\mathcal{R}} x \leq_{\mathcal{L}} y$ bereits $x = y$.*

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es $u, v \in M$, sodass $x = uy$ und $y = xv$. Damit gilt $x = uy = uxv$ und induktiv $x = u^\omega x v^\omega$. Nun wenden wir die Gleichung von \mathbf{A} an und erhalten $x = u^\omega x v^{\omega+1} = xv = y$. \square

Lemma 2.33. *Sei M ein endliches Monoid, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. M ist aperiodisch.
2. Es gibt ein $n \geq 1$, sodass $x^{n+1} = x^n$ für alle $x \in M$.
3. Es gilt $x^{\omega+1} = x^\omega$ für alle $x \in M$.
4. M ist \mathcal{H} -trivial.

Beweis. Für „ $1 \Rightarrow 2$ “ reicht es das Maximum aller n mit $x^{n+1} = x^n$ zu wählen, welches existieren muss, da M endlich ist. Die Implikation „ $2 \Rightarrow 3$ “ ist trivial und „ $3 \Rightarrow 4$ “ folgt aus Lemma 2.32. Sei für den Nachweis von „ $4 \Rightarrow 1$ “ M \mathcal{H} -trivial und $x \in M$. Da M endlich ist, muss es Zahlen $n, m \geq 1$ geben mit $n < m$ und $x^n = x^m$. Es gilt $x^n = x^{n+1}x^{m-n-1} = x^{m-n-1}x^{n+1}$ und damit $x^n \leq_{\mathcal{R}} x^{n+1}$ sowie $x^n \leq_{\mathcal{L}} x^{n+1}$. Weiterhin gilt $x^n \geq_{\mathcal{R}} x^{n+1}$, $x^n \geq_{\mathcal{L}} x^{n+1}$ und damit schließlich $x^n \mathcal{H} x^{n+1}$. M ist aber \mathcal{H} -trivial und damit folgt $x^n = x^{n+1}$. \square

Lemma 2.34. *Sei $M \in \mathbf{DS}$ und $x, y, a \in M$, dann folgt aus $y \leq_{\mathcal{J}} a$ und $x \mathcal{R} xy$, dass $x \mathcal{R} xya$. Für \mathcal{L} gilt eine duale Aussage.*

Beweis. Die Bedingung $xya \leq_{\mathcal{R}} x$ ist trivialerweise erfüllt und es reicht zu zeigen, dass $xya \geq_{\mathcal{R}} x$ gilt. Nach der Voraussetzung gibt es $u, v, w \in M$, sodass gilt $y = uav$ und $x = xyw$. Damit gilt $xy = xywy$ und folglich induktiv $xy = xy(wy)^\omega$. Mit $y = uav$ gilt weiter $xy = xy(wuav)^\omega$ und unter Anwendung der Gleichung von **DS** folgt $xy = xy((wuav)^\omega(avwu)^\omega(wuav)^\omega)^\omega$. Damit und der Abkürzung $z = (wuav)^\omega(avwu)^\omega(wuav)^\omega$ ergibt sich

$$\begin{aligned} xy &= xy(wuav)^\omega \cdot (avwu)^\omega(wuav)^\omega \cdot z^{\omega-1} \\ &= xy \cdot (avwu)^\omega(wuav)^\omega \cdot z^{\omega-1} \\ &= xya \cdot vwu(avwu)^{\omega-1}(wuav)^\omega \cdot z^{\omega-1} \end{aligned}$$

und damit $xya \geq_{\mathcal{R}} xy$ und mit $xy \geq_{\mathcal{R}} x$ folgt $xya \geq_{\mathcal{R}} x$. \square

Daf folgende Lemma benötigen wir im nächsten Abschnitt.

Lemma 2.35. *Sei $M \in \mathbf{DS} \cap \mathbf{A}$, dann gilt $(xyz)^\omega y (xyz)^\omega = (xyz)^\omega$ für alle $x, y, z \in M$.*

Beweis. Sei $M \in \mathbf{DS} \cap \mathbf{A}$ und $x, y, z \in M$. Offensichtlich gilt $y \leq_{\mathcal{J}} (xyz)^\omega$ und mit zweimaliger Anwendung von Lemma 2.34 folgt $(xyz)^\omega = (xyz)^\omega (xyz)^\omega \mathcal{R} (xyz)^\omega y \mathcal{R} (xyz)^\omega y (xyz)^\omega$. Dual dazu gilt $(xyz)^\omega \mathcal{L} (xyz)^\omega y (xyz)^\omega$ und da $M \in \mathbf{A}$ folgt mit Lemma 2.34 schließlich $(xyz)^\omega = (xyz)^\omega y (xyz)^\omega$. \square

2.5 Die Varietät **DA**

Die für diese Arbeit wichtigste Varietät ist **DA**. Der Name **DA** leitet sich von der Definition nach Schützenberger ab, nach der **DA** die Klasse aller endlichen Monoide ist, deren reguläre \mathcal{D} -Klassen aperiodische Unterhalbgruppen bilden. **DA** hat eine Vielfalt sprachtheoretischer, logischer und algebraischer Charakterisierungen. Dieser

Abschnitt hat zum Ziel, einige für uns interessante Charakterisierungen von **DA** zu beweisen, die wir im folgenden Theorem zusammenfassen. Für einen darüber hinausgehenden Überblick verweisen wir auf den sehr lesenswerten Artikel [DGK108], sowie auf [TT02]. Dabei ist \equiv_k^{DA} ($k \geq 1$) eine Familie von Kongruenzen, die wir im Laufe dieses Abschnitts einführen werden.

Theorem 2.36. *Sei M ein endliches Monoid, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $M \in \mathbf{DA}$.
2. $M \in \mathbf{DS} \cap \mathbf{A}$.
3. Es gilt $(xyz)^\omega y (xyz)^\omega = (xyz)^\omega$ für alle $x, y, z \in M$.
4. Es gilt $(xy)^\omega y (xy)^\omega = (xy)^\omega$ für alle $x, y \in M$.
5. Es gilt $(xy)^\omega x (xy)^\omega = (xy)^\omega$ für alle $x, y \in M$.
6. Es gilt $exe = e$ für alle $e^2 = e \in M$ und $x \in M$ mit $e \leq_{\mathcal{J}} x$.
7. Es gilt $eM_e e = e$ für alle $e^2 = e \in M$.
8. Jede reguläre \mathcal{D} -Klasse von M ist eine idempotente Unterhalbgruppe von M .
9. Jede \mathcal{D} -Klasse von M enthält nur Idempotente, oder kein Element ist idempotent.
10. M ist Quotient eines Monoids $\Gamma^* / \equiv_k^{\text{DA}}$ für ein endliches Alphabet Γ und $k \geq 0$.

Wegen Aussage 2, sind Lemma 2.32 und 2.34 für alle $M \in \mathbf{DA}$ anwendbar.

Beweis von Theorem 2.36

Wir zeigen zunächst die Implikation „1 \Rightarrow 2“. Für die Inklusion $\mathbf{DA} \subseteq \mathbf{DS}$ ist nichts zu zeigen. Sei $M \in \mathbf{DA}$ und $x \in M$, dann ist $x^{\omega+1} \mathcal{R} x^\omega$, denn $x^{\omega+1} x^{\omega-1} = x^\omega x^\omega = x^\omega$. Insbesondere sind $x^{\omega+1}$ und x^ω in der selben regulären \mathcal{D} -Klassen und da reguläre \mathcal{D} -Klassen in M nach Definition von **DA** aperiodisch sind, folgt $x^{\omega+1} = x^\omega$ und damit $M \in \mathbf{A}$.

Die Folgerung „2 \Rightarrow 3“ ist die Aussage von Lemma 2.35. Die Implikation „3 \Rightarrow 4“ ergibt sich durch Setzen von $z = xy$ und der Beobachtung $(xyz)^\omega = ((xy)^2)^\omega = ((xy)^\omega)^2 = (xy)^\omega$. Die Implikation „3 \Rightarrow 5“ ergibt sich analog dazu mit $x = yz$ und einer Umbenennung der Variablen. Als Nächstes zeigen wir die Äquivalenz „4 \Leftrightarrow 5“. Aus Symmetriegründen genügt es „4 \Rightarrow 5“ zu zeigen und wir nehmen an, M genüge den Bedingungen in 4. Zunächst ist M aperiodisch, denn mit $x = y$ folgt $x^\omega = (xx)^\omega =$

$(xx)^\omega x (xx)^\omega = x^{\omega+1}$ für $x \in M$. Damit gilt für $x, y \in M$ die Gleichung $(xy)^\omega = x(yx)^\omega y = x(yx)^\omega x(yx)^\omega y = (xy)^\omega x (xy)^\omega xy = (xy)^\omega x (xy)^\omega$.

Aus den Punkten 4 und 5 folgt Aussage 6: Seien dazu $e, x \in M$ und e sei idempotent mit $e = uxv$ für $u, v \in M$. Wegen $e = e^\omega$ gilt $e = (uxv)^\omega$ und mit Punkt 4 folgt $e = (ex \cdot ve)^\omega$ und daraus mit 5 wiederum $e = e(ex)e = exe$.

Als Nächstes zeigen wir „6 \Rightarrow 7“. Sei $x \in M_e$, das heißt $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ mit $e \leq_{\mathcal{J}} x_i$ für $1 \leq i \leq n$. Wir zeigen per Induktion über n , dass $exe = e$ unter der Voraussetzung von Aussage 6 gilt. Für $n = 0$ ist $x = 1$ und es ist nichts zu zeigen. Sei im Folgenden $n \geq 1$. Nach 6 gilt $e = ex_n e$ und induktiv können wir $ex'e = e$ annehmen, wobei $x' = x_1 \cdots x_{n-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} e &= ex'e = (ex')^\omega e \\ &= (ex')^\omega x_n (ex')^\omega e && \text{Mit Punkt 6, da } (ex')^\omega \leq_{\mathcal{J}} e \leq_{\mathcal{J}} x_n \\ &= (ex')^{\omega-1} ex' x_n (ex')^\omega e. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $x'x_n = x$ ein Faktor von e ist, also $e \leq_{\mathcal{J}} x$ und damit $exe = e$ folgt.

Wir zeigen „7 \Rightarrow 8“. Sei $e^2 = e \in M$, wir zeigen zunächst dass z idempotent ist, wenn $z \mathcal{R} e$. Wegen Lemma 2.10 (1) gilt $z = ez$ und wegen $e \leq_{\mathcal{R}} z$ folgt $z \in M_e$. Damit gilt $zz = ezez = ez = z$ und z ist idempotent. Analog lässt sich zeigen, dass z idempotent ist falls $z \mathcal{L} e$. Damit ist jedes Element in \mathcal{D}_e idempotent, denn ist $e \mathcal{R} z \mathcal{L} x$, dann ist zunächst z und schließlich x idempotent. Weiterhin ist $\mathcal{J}_e = \mathcal{D}_e$ abgeschlossen unter Multiplikation: Sei nach dieser Betrachtung ohne Einschränkung $f^2 = f \in \mathcal{J}_e$, dann gilt insbesondere $f \in M_e$. Mit der Voraussetzung folgt weiterhin $e = efe$, daraus wiederum $e \leq_{\mathcal{J}} ef \leq_{\mathcal{J}} e$ und damit $ef \in \mathcal{J}_e$.

Die Folgerung „8 \Rightarrow 9“ ist offensichtlich korrekt und wir zeigen „9 \Rightarrow 1“. Seien $e \in M$ idempotent und $x, y \in \mathcal{D}_e$. Also gibt es ein $f \in \mathcal{D}_e$ mit $x \mathcal{L} f \mathcal{R} y$. Nach Voraussetzung ist f idempotent und mit Proposition 2.11 folgt $xy \in \mathcal{R}_x \cap \mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{D}_e$. Nach Korollar 2.12 ist jede \mathcal{H} -Klasse von M , die ein Idempotentes enthält eine maximale Untergruppe von M und kann damit höchstens ein idempotentes Element enthalten: Das neutrale Element der Gruppe (siehe Anhang). Nach der Voraussetzung enthält jede \mathcal{H} -Klasse, die in \mathcal{D}_e enthalten ist, nur Idempotente und damit genau ein Element. Deshalb ist \mathcal{D}_e eine \mathcal{H} -triviale Unterhalbgruppe von M und damit nach Lemma 2.33 aperiodisch.

Für die Äquivalenz von Punkt 10 mit den restlichen Aussagen führen wir zunächst die Relation \equiv_k^{DA} für $k \geq 0$ ein. Für ein Wort $u \in \Gamma^*$ und $a \in \text{alph}(u)$ ist dabei $u = u_- a u_+$ eine *a-links-Faktorisierung*, falls $a \notin \text{alph}(u_-)$. Entsprechend ist $u = u_- a u_+$ eine *a-rechts-Faktorisierung*, falls $a \notin \text{alph}(u_+)$. Für jedes $a \in \text{alph}(u)$ gibt es derartige Faktorisierungen und diese sind eindeutig.

Definition 2.37. Für ein endliches Alphabet Γ definieren wir $u \equiv_0^{\text{DA}} v$ für alle $u, v \in \Gamma^*$. Weiterhin definieren wir induktiv $u \equiv_k^{\text{DA}} v$ genau dann, wenn Folgendes gilt:

1. $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$
2. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ gilt mit den a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$

$$u_- \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_- \quad u_+ \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_+$$

3. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ gilt mit den a -rechts-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$

$$u_- \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_- \quad u_+ \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_+$$

Zunächst weisen wir nach, dass \equiv_k^{DA} für alle $k \geq 0$ eine Kongruenz ist. Dazu benötigen wir jedoch die folgende Eigenschaft.

Lemma 2.38. *Sei Γ ein endliches Alphabet, $k \geq 0$ und $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \equiv_{k+1}^{\text{DA}} v$, dann folgt $u \equiv_k^{\text{DA}} v$.*

Beweis. Wir führen eine Induktion nach k . Für $k = 0$ gilt $u \equiv_k^{\text{DA}} v$ für alle $u, v \in \Gamma^*$ und die Aussage ist trivialerweise erfüllt. Sei im Folgenden $k \geq 1$. Nach Definition gilt $u_- \equiv_k^{\text{DA}} v_-$ und $u_+ \equiv_k^{\text{DA}} v_+$ für $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ und die a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ sowie $v = v_- a v_+$. Induktiv gilt $u_- \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_-$ und $u_+ \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_+$ und Punkt 2 der Definition ist erfüllt. Forderung 3 folgt symmetrisch dazu und es gilt $u \equiv_k^{\text{DA}} v$. \square

Lemma 2.39. *Für jedes endliche Alphabet Γ und $k \geq 0$ ist \equiv_k^{DA} eine Kongruenz mit endlichem Index.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist \equiv_k^{DA} offensichtlich eine Kongruenz. Sei im Folgenden $k \geq 1$. Die Reflexivität und Symmetrie ergeben sich sofort induktiv. Die Transitivität folgt ebenfalls direkt aus der Induktionsvoraussetzung und der Tatsache, dass a -links-Faktorisierungen und a -rechts-Faktorisierungen eindeutig sind. Es verbleibt noch die Verträglichkeit mit der Multiplikation nachzuweisen. Seien $x, y, u, v \in \Gamma^*$ mit $x \equiv_k^{\text{DA}} y$ und $u \equiv_k^{\text{DA}} v$. Wegen $k > 0$ gilt $\text{alph}(x) = \text{alph}(y)$ und $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$. Deshalb ist die Alphabetsbedingung

$$\begin{aligned} \text{alph}(xu) &= \text{alph}(x) \cup \text{alph}(u) \\ &= \text{alph}(y) \cup \text{alph}(v) = \text{alph}(yv) \end{aligned}$$

erfüllt. Sei $a \in \text{alph}(x)$, dann sind die a -links-Faktorisierungen von xu und yv gegeben durch $xu = x_- a x_+ u$ sowie $yv = y_- a y_+ v$, wobei $x = x_- a x_+$ die a -links-Faktorisierung von x und $y = y_- a y_+$ die a -links-Faktorisierung von y ist. Aus $x \equiv_k^{\text{DA}} y$ folgt $x_- \equiv_{k-1}^{\text{DA}} y_-$ und $x_+ \equiv_{k-1}^{\text{DA}} y_+$. Induktiv ist \equiv_{k-1}^{DA} eine Kongruenz und mit Lemma 2.38 folgt $x_+ u \equiv_{k-1}^{\text{DA}} y_+ v$.

Für $a \in \text{alph}(u) \setminus \text{alph}(x)$ argumentieren wir analog und es ist Punkt 2 der Definition erfüllt. Punkt 3 folgt symmetrisch dazu und insgesamt gilt $xu \equiv_k^{\text{DA}} yv$. \square

Wir sind nun in der Lage, den letzten Punkt in der Charakterisierung von Theorem 2.36 zu beweisen. Aus der folgenden Proposition folgt zunächst mit der Abgeschlossenheit von **DA** unter Quotientenbildung die Richtung „10 \Rightarrow 3“:

Proposition 2.40. *Sei Γ ein endliches Alphabet und $m \geq k \geq 0$, dann erfüllt $\Gamma^*/\equiv_k^{\text{DA}}$ die Gleichung $(xyz)^m y (xyz)^m = (xyz)^m$.*

Beweis. Für den Beweis halten wir eine Belegung von x , y und z mit Werten aus Γ^* fest und bezeichnen diese der Einfachheit halber ebenfalls mit x , y und z . Wir weisen die Behauptung durch Induktion über m nach und stellen für den Induktionsanfang fest, dass aus $m = 0$ auch $k = 0$ folgt und damit die Aussage wahr ist. Sei im Folgenden $m \geq 1$, dann sind die a -links-Faktorisierungen gegeben durch

$$\begin{aligned} (xyz)^m y (xyz)^m &= u_- a u_+ (xyz)^{m-1} y (xyz)^m \quad \text{und} \\ (xyz)^m &= u_- a u_+ (xyz)^{m-1}. \end{aligned}$$

Induktiv gilt $(xyz)^{m-1} y (xyz)^{m-1} \equiv_{k-1}^{\text{DA}} (xyz)^{m-1}$ und es folgt $(xyz)^m \equiv_{k-1}^{\text{DA}} (xyz)^{m-1}$ aus Lemma 2.38. Insgesamt folgt mit der Kongruenzeigenschaft von \equiv_{k-1}^{DA}

$$u_+ (xyz)^{m-1} y (xyz)^m \equiv_{k-1}^{\text{DA}} u_+ (xyz)^{m-1}.$$

Die Forderung $u_- \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_-$ ist trivialerweise erfüllt und somit gilt Punkt 2 der Definition von \equiv_k^{DA} . Aus Symmetriegründen gilt deshalb auch Punkt 3 und schließlich $(xyz)^m y (xyz)^m \equiv_k^{\text{DA}} (xyz)^m$. \square

Folgende Proposition zeigt die Implikation „2 \Rightarrow 10“ und schließt damit den Beweis von Theorem 2.36 ab. Im Beweis wird dabei eine wichtige Technik für Monoide in **DA** benutzt.

Proposition 2.41. *Sei Γ ein endliches Alphabet und $M = \Gamma^*/\gamma \in \mathbf{DS} \cap \mathbf{A}$, dann ist M Quotient von $\Gamma^*/\equiv_k^{\text{DA}}$ für ein $k \geq 0$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\pi: \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*/\gamma$ die natürliche Projektion auf die Kongruenzklassen von γ . Sei $u \in \Gamma^*$. Wir faktorisieren $u = u_0 a_1 u_1 \cdots a_n u_n$ mit $u_i \in \Gamma^*$ und $a_i \in \Gamma$ so, dass bezüglich γ folgende Bedingungen gelten:

- $1 \mathcal{R} \pi(u_0)$,
- $\pi(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i) \mathcal{R} \pi(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i)$ für $1 \leq i \leq n$,
- $\pi(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i) >_{\mathcal{R}} \pi(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i a_{i+1})$ für $1 \leq i < n$.

Die Idee hinter dieser Faktorisierung ist, für die Zeichen a_i die kleinsten Positionen in u zu wählen, die die \mathcal{R} -Klasse modulo γ reduzieren. Die Faktorisierung ist eindeutig, da es, falls noch nicht die \mathcal{R} -Klasse von u erreicht wurde, in jedem Schritt ein eindeutiges erstes Zeichen geben muss, das die \mathcal{R} -Klasse verringert. Wegen Lemma 2.34 haben wir $\pi(u_{i-1}) \not\leq_{\mathcal{J}} \pi(a_i)$ und damit $a_i \notin \text{alph}(u_{i-1})$. Also ist $u_{i-1}a_i(u_i \cdots u_n)$ eine a_i -links-Faktorisierung. Des Weiteren gibt es maximal $|M|$ viele \mathcal{R} -Klassen und es folgt $n \leq |M|$.

Wir zeigen über eine Induktion über die Größe des Alphabets $\text{alph}(u)$, dass $u \equiv_k^{\text{DA}} v$ für $k > |\text{alph}(u)| |M|$ die Gleichung $\pi(u) = \pi(v)$ impliziert.

Zunächst gilt $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ wegen $k > 0$. Für $\text{alph}(u) = \text{alph}(v) = 0$ ist $u = \varepsilon = v$ und da γ eine Kongruenz ist folgt $\pi(u) = \pi(v)$. Sei $\text{alph}(u) \geq 1$, dann gilt nach der Definition von \equiv_k^{DA} für die obige Faktorisierung $u_0 \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v_0$ und $u_1 \cdots a_n u_n \equiv_{k-1}^{\text{DA}} v'_0$. Dabei ist $v = v_0 a_1 v'_0$ die a_1 -links-Faktorisierung von v und es gilt $|\text{alph}(u_0)| \leq |\text{alph}(u)|$. Wiederholtes anwenden dieses Arguments definiert eine Faktorisierung von v , sodass

$$v = v_0 a_1 v_1 \cdots a_n v_n,$$

wobei $u_i \equiv_{k-i-1}^{\text{DA}} v_i$ für $0 \leq i \leq n$ und $a_{i+1} \notin \text{alph}(v_i)$ für $0 \leq i \leq n-1$. Für den Index gilt im Bereich $0 \leq i \leq n-1$ mit den Abkürzungen $m = |M|$, $\alpha = |\text{alph}(u)|$ und $\alpha_i = |\text{alph}(u_i)|$

$$\begin{aligned} k - i - 1 &> \alpha m - (m - 1) - 1 && \text{mit } k > \alpha m \text{ und } i \leq n - 1 \leq m - 1 \\ &\geq (\alpha_i + 1)m - m && \text{mit } \alpha \geq \alpha_i + 1 \\ &= \alpha_i m. \end{aligned}$$

Also können wir für $0 \leq i \leq n-1$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten $\pi(u_i) = \pi(v_i)$ für $0 \leq i \leq n-1$. Wir können die Induktionsvoraussetzung für $i = n$ jedoch nicht anwenden, da $\text{alph}(u_n) = \text{alph}(u)$ möglich ist. Nach Konstruktion gilt aber mit dem eben Gezeigten

$$\begin{aligned} \pi(u) &\mathcal{R} \pi(u_0 a_1 u_1 \cdots a_n) \\ &= \pi(v_0 a_1 v_1 \cdots a_n) \geq_{\mathcal{R}} \pi(v_0 a_1 v_1 \cdots a_n v_n) = \pi(v) \end{aligned}$$

und damit $\pi(u) \geq_{\mathcal{R}} \pi(v)$. Symmetrisch dazu können wir v bezüglich \mathcal{L} faktorisieren und erhalten durch eine analoge Schlussweise $\pi(v) \geq_{\mathcal{L}} \pi(u)$. Nach Voraussetzung ist M aperiodisch und mit Lemma 2.32 folgt schließlich $\pi(u) = \pi(v)$.

Die Behauptung folgt nun mit $k > |\Gamma| |M|$, da dann für alle $u, v \in \Gamma^*$ aus $u \equiv_k^{\text{DA}} v$ die Gleichung $\pi(u) = \pi(v)$ folgt, das heißt $\equiv_k^{\text{DA}} \subseteq \gamma$. Damit ist M Quotient von $\Gamma^* / \equiv_k^{\text{DA}}$. \square

2.6 Der Verband der Untervarietäten von \mathbf{B}

In diesem Abschnitt werden wir eine Hierarchie von Varietäten unterhalb der Varietät \mathbf{B} aller idempotenten Monoide einführen und einige bekannte Resultate anführen, auf die wir später aufbauen. Wismath [Wis86] untersuchte die Struktur des Verbands aller Untervarietäten von \mathbf{B} , und zeigte: Ist \mathbf{Z} eine Monoidvarietät und $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{B}$, dann ist \mathbf{Z} entweder die triviale Varietät, \mathbf{B} , \mathbf{B}_k^r , \mathbf{B}_k^l oder $\mathbf{B}_k^r \cap \mathbf{B}_k^l$ für ein $k \geq 1$. Dabei ist $\mathbf{B}_k^r = \mathbf{B}_k^l = \mathbf{J}_1$ und $\mathbf{B}_k^r = \mathbf{LZ} \oplus \mathbf{B}_{k-1}^l$, sowie $\mathbf{B}_k^l = \mathbf{RZ} \oplus \mathbf{B}_{k-1}^r$ für $k \geq 2$. Außerdem wies er nach, dass alle diese Varietäten verschieden sind, insbesondere also, dass die Hierarchien $(\mathbf{B}_k^r)_{k \geq 1}$ und $(\mathbf{B}_k^l)_{k \geq 1}$ echt sind. Im Folgenden geben wir außerdem Gleichungen für \mathbf{B}_k^r und \mathbf{B}_k^l nach [TW97] an, die wir später benötigen werden.

Definition 2.42. Wir definieren für $n \geq 2$ induktiv Wörter G_n und I_n über dem Alphabet Ω durch

$$\begin{aligned} G_2 &= x_2 x_1 & I_2 &= x_2 x_1 x_2 \\ G_k &= x_k \overline{G_{k-1}} & I_k &= G_k x_k \overline{I_{k-1}} \end{aligned}$$

Dabei ist \bar{u} das gespiegelte Wort von u .

Proposition 2.43. Für $k \geq 2$ gilt $\mathbf{B}_k^r = \llbracket G_n = I_n \rrbracket_{\mathbf{B}}$ und $\mathbf{B}_k^l = \llbracket \overline{G_n} = \overline{I_n} \rrbracket_{\mathbf{B}}$

Kapitel 3

Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

In diesem Kapitel führen wir zwei Klassen von Varietäten ein und geben unterschiedliche Charakterisierungen der Elemente dieser Klassen an. Wie wir sehen werden, bilden diese Klassen zwei Hierarchien und sind eng miteinander verwandt.

Konkret definieren wir zunächst für $k \geq 2$ induktiv Wörter ρ_k und σ_k über der Menge Ω an Variablen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \rho_2 &= (x_2x_1)^\omega & \sigma_2 &= \rho_2x_2 \\ \rho_k &= (x_k\overline{\rho_{k-1}})^\omega & \sigma_k &= \rho_kx_k\overline{\sigma_{k-1}} \quad \text{für } k \geq 3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet \bar{u} das gespiegelte Wort von u . Damit definieren wir für $k \geq 1$ Varietäten \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k , durch

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{L}_1 = \mathbf{J} \\ \mathbf{R}_k &= \llbracket \rho_k = \sigma_k \rrbracket & \mathbf{L}_k &= \llbracket \overline{\rho_k} = \overline{\sigma_k} \rrbracket \quad \text{für } k \geq 2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Für $k = 2$ erhalten wir dabei insbesondere $\mathbf{R}_2 = \llbracket (x_2x_1)^\omega = (x_2x_1)^\omega x_2 \rrbracket$ und damit ist nach Lemma 2.30 \mathbf{R}_2 die Varietät \mathbf{R} aller \mathcal{R} -trivialen Monoide und entsprechend ist \mathbf{L}_2 die Varietät \mathbf{L} aller \mathcal{L} -trivialen Monoide. Im Vorgriff darauf, dass die Klassen \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k ($k \geq 1$) Hierarchien bilden, werden wir von nun anstatt des schwerfälligen „Klasse von Varietäten“ kurz „Hierarchie“ sagen.

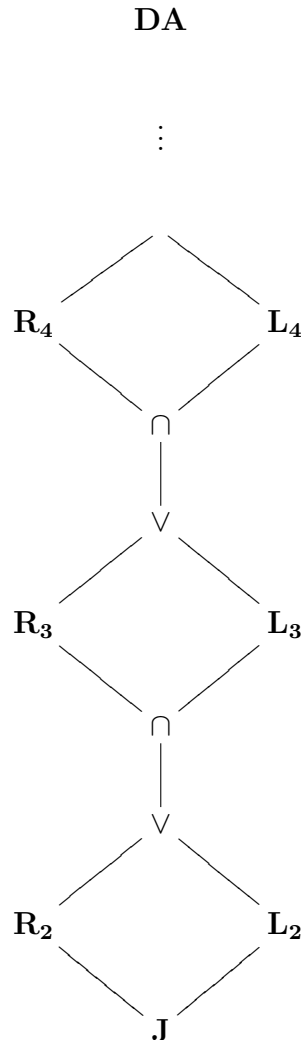
In Abschnitt 3.1 führen wir dazu zunächst ein wichtiges Hilfsmittel ein, das uns in Abschnitt 3.3 dazu dienen wird, die Hierarchie mittels Mal'cev-Produkten zu charakterisieren.

In Abschnitt 3.2 führen wir zwei Familien von Relationen ein. Wir zeigen, dass diese Relationen Kongruenzen sind. In Abschnitt 3.3 werden wir sehen, dass die Zugehörigkeit eines Monoids Γ^*/γ zu einer bestimmten Ebene der obigen Hierarchien dadurch charakterisiert ist, dass es eine Kongruenz auf dieser Ebene gibt, die γ verfeinert.

Abschnitt 3.3 enthält das Haupttheorem dieser Arbeit und beweist die unterschiedlichen Charakterisierungen der Alternierungshierarchien, sowie eine nicht-triviale Gleichung für den Schnitt von \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k ab Ebene drei. Daran anschließend klären wir in Abschnitt 3.4 den Zusammenhang der Hierarchien zu \mathbf{DA} und untereinander. In Abschnitt 3.5 zeigen wir, dass die Elemente der Alternierungshierarchien maximal in einem durch die Projektion auf die Band-Varietät induzierten Intervall sind und außerdem, dass die Hierarchien echt sind.

In Abschnitt 3.6 führen wir schließlich zwei alternative Familien von Kongruenzen ein, die ab $k = 2$ die selben Hierarchien erzeugen wie die Kongruenzen aus Abschnitt 3.2.

Insgesamt folgt aus den Resultaten dieses Kapitels, dass die Alternierungshierarchien folgende Struktur haben:



3.1 Ein Kongruenzsystem für $\mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{V}$

In diesem Abschnitt führen wir ein wichtiges Hilfsmittel nach [HW99] für die Ausführung der Operation $\mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{V}$ ein, die wir in den folgenden Abschnitten benötigen werden. Dazu konstruieren wir für jedes Monoid eine Kongruenz, sodass dieses Monoid genau dann in $\mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{V}$ ist, wenn der Quotient des Monoids modulo der Kongruenz in \mathbf{V} ist. Für endliche Monoide ist der Quotient effektiv berechenbar und damit $\mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{V}$ entscheidbar, wenn \mathbf{V} entscheidbar ist.

Definition 3.1. Sei M ein endliches Monoid und x, y in M . Wir definieren eine Relation $\sim_K \subseteq M \times M$ durch

$$x \sim_K y \text{ genau dann, wenn } \forall e = e^2 \in M: ex \mathcal{R} e \text{ oder } ey \mathcal{R} e \Rightarrow ex = ey \quad (3.3)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass \sim_K nicht fest ist, sondern je nach betrachtetem Monoid variiert und deshalb formal eine Abbildung ist, die jedem Monoid eine Relation zuordnet. Im Folgenden werden wir diese Unterscheidung jedoch nicht treffen, da stets eindeutig sein wird, auf welches Monoid wir uns beziehen, wenn wir \sim_K schreiben. Die folgenden zwei technischen Lemmata zeigen, dass \sim_K jedem Monoid eine Kongruenz zuordnet.

Lemma 3.2. Für jedes endliche Monoid M ist \sim_K eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Symmetrie von \sim_K folgt sofort aus der Symmetrie der Definition in x und y . Zum Nachweis der Reflexivität sei $x \in M$. Aus $y = x$ folgt direkt $ex = ey$ für alle e in M , insbesondere für alle Idempotenten.

Um die Transitivität zu zeigen sei z in M mit $x \sim_K y$ und $y \sim_K z$. Weiterhin sei e ein idempotentes Element. Falls $ex \mathcal{R} e$ oder $ey \mathcal{R} e$ ist, folgt nach der Definition von $x \sim_K y$, dass $ex = ey$ gilt. Insbesondere folgt daraus $ey \mathcal{R} e$ und nach der Definition von $y \sim_K z$ gilt $ey = ez$. Anderenfalls ist sowohl $ex \mathcal{R} e$ als auch $ey \mathcal{R} e$. Damit folgt aber $ez \mathcal{R} e$, ansonsten würde nach der Definition von $y \sim_K z$ die Gleichung $ey = ez$ folgen und es wäre $ey = ez \mathcal{R} e$ im Widerspruch zur Annahme. \square

Lemma 3.3. Für jedes endliche Monoid M ist \sim_K kompatibel zur Multiplikation.

Beweis. Es seien x, y in M mit $x \sim_K y$ und p, q in M . Weiterhin sei e ein idempotentes Element. Falls $ep \mathcal{R} e$ folgt $epxq \mathcal{R} e$ und $epyq \mathcal{R} e$, da durch eine Multiplikation von rechts die \mathcal{R} -Klasse nicht größer werden kann.

Sei also $ep \mathcal{R} e$. Nach Lemma 2.13 gibt es ein idempotentes Element e' in M , sodass $e' \mathcal{L} ep$ und $p'e' = ep$ für ein p' in M . Da $e' \mathcal{L} ep \mathcal{R} e$, sind e' und e in der selben \mathcal{D} -Klasse

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

Im Falle $e'x \mathcal{R} e'$ schließen wir $e' >_{\mathcal{J}} e'x$ und damit $e \mathcal{J} e' >_{\mathcal{J}} e'x \geq_{\mathcal{J}} p'e'xq$. Damit folgt nun $epxq = p'e'xq \mathcal{R} e$. Nach der Definition von $x \sim_K y$ folgt $e'y \mathcal{R} e'$, also $e \mathcal{J} e' >_{\mathcal{J}} e'y$, damit $epyq = p'e'yq <_{\mathcal{J}} e$ und schließlich $e \mathcal{R} epyq$.

Nehmen wir schließlich $e'x \mathcal{R} e'$ an. Wegen $x \sim_K y$ folgt $e'x = e'y$ und damit $epxq = p'e'xq = p'e'yq = epyq$. Dies zeigt $pxq \sim_K pyq$. \square

Die beiden Lemmata zusammen ergeben folgendes Korollar.

Korollar 3.4. *Für jedes endliche Monoid M ist \sim_K eine Kongruenz.*

Das nächste Lemma wird für das folgende Hauptresultat über \sim_K benötigt. An dieser Stelle wollen wir daran erinnern, dass für einen Morphismus τ das Bild $\tau(x)$ eine Menge ist.

Lemma 3.5. *Sei M ein endliches Monoid, \mathbf{V} eine Varietät und $\tau: M \rightarrow N$ ein \mathbf{K} -Morphismus von M in ein Monoid N in \mathbf{V} . Seien weiterhin x, y Elemente in M mit $\tau(x) \cap \tau(y) \neq \emptyset$, dann gilt $x \sim_K y$.*

Beweis. „ \Rightarrow “ Seien $\tau: M \rightarrow N, x$ und y wie in der Voraussetzung angegeben. Betrachte ein Idempotentes e von M . Wir nehmen $ex \mathcal{R} e$ an, der Fall $ey \mathcal{R} e$ lässt sich analog dazu zeigen. Sei q so, dass $e = exq$. Da $e^2 = e$, folgt $e = exqe$, daraus $e \leq_{\mathcal{L}} qe$ und $e \leq_{\mathcal{J}} qe \leq_{\mathcal{J}} e$ und mit Lemma 2.10 $qe \mathcal{L} e$. Mit der Bezeichnung $p = qe$ zeigt dies, dass es p in M mit $p \mathcal{L} e$ und $exp = e$ gibt. Da e idempotent ist, folgt aus $p \leq_{\mathcal{L}} e$ nach Lemma 2.10 $p = pe$. Insbesondere ist px idempotent, da $px = pe x = p exp x = px px$. Weiterhin existiert nach Annahme ein $z' \in \tau(x) \cap \tau(y)$.

Seien e', p' in N mit $e \tau e'$ und $p \tau p'$, sodass außerdem e' und $p'z'$ idempotent sind. Derartige Elemente müssen existieren: Ist zum Einen $e \tau \tilde{e}$, dann gilt $e = e^\omega \tau \tilde{e}^\omega$ und $e' = \tilde{e}^\omega$ ist eine geeignete Wahl. Zum Anderen erfüllt $p' = (\tilde{p}e'z')^{\omega-1} \tilde{p}e'$ für ein $\tilde{p} \in \tau(p)$ die obige Bedingungen an p' . Dabei ist ω eine Zahl, sodass für jedes Element in M und in N die ω -Potenz idempotent ist.

Da τ ein \mathbf{K} -Morphismus ist, $p'z'$ idempotent ist und $px, py \in \tau^{-1}(p'z')$ gilt, muss für px und py die charakteristische Gleichung $\llbracket x^\omega y = x^\omega \rrbracket$ von \mathbf{K} und damit $(px)^\omega py = (px)^\omega$ gelten. Damit und mit px idempotent folgt

$$\begin{aligned} px &= px py \\ &= pe xpy \quad \text{da } p = pe \\ &= pey \quad \text{da } exp = e \\ &= py \end{aligned}$$

Damit wiederum können wir $ex = ex px = ex py = ey$ und deshalb $x \sim_K y$ schließen. \square

Das folgende Theorem präzisiert nun die Haupteigenschaft von \sim_K .

Theorem 3.6. *Sei M ein endliches Monoid und \mathbf{V} eine Varietät. Es gilt*

$$M \in \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V} \text{ genau dann, wenn } M/\sim_K \in \mathbf{V} \quad (3.4)$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei M in $\mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{V}$, das heißt es existiert ein \mathbf{K} -Morphismus $\tau: M \rightarrow N$, wobei N in \mathbf{V} ist. Wir definieren eine Abbildung $\varphi: N \rightarrow M/\sim_K$ durch $p \mapsto [q]_{\sim_K}$, wobei $q \in M$ ein beliebiger Vertreter von $\tau^{-1}(p)$ ist. Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert: Sei $q' \in M$ ein anderes Element mit $q' \tau p$, dann zeigt Lemma 3.5, dass $q \sim_K q'$, damit $[q]_{\sim_K} = [q']_{\sim_K}$ und deshalb $\varphi(p)$ nicht von der Wahl des Vertreters abhängt. Weiterhin ist φ ein Homomorphismus, da $\varphi(p_1 p_2) = [q_1]_{\sim_K} [q_2]_{\sim_K} = \varphi(p_1) \varphi(p_2)$ und $\varphi(1_N)$ wegen $\varphi(p) \varphi(1_N) = \varphi(p 1_N) = \varphi(p) = \varphi(1_N p) = \varphi(1_N) \varphi(p)$ das Einselement in M/\sim_K ist. Außerdem ist φ surjektiv: Sei $[q]_{\sim_K} \in M/\sim_K$ für $q \in M$, dann existiert $p \in N$ mit $q \tau p$, da τ total ist und damit $\varphi(p) = [q]_{\sim_K}$. Damit haben wir $M \xrightarrow{\tau} N \xrightarrow{\varphi} M/\sim_K$. Da \mathbf{V} als Varietät unter Quotienten abgeschlossen ist und N in \mathbf{V} enthalten ist, folgt $M/\sim_K \in \mathbf{V}$.

„ \Leftarrow “ Wir zeigen, dass die natürliche Projektion $M \rightarrow M/\sim_K$ ein \mathbf{K} -Morphismus ist: Sei dazu $[e]_{\sim_K}$ eine idempotente Klasse von M/\sim_K , sowie ohne Einschränkung e idempotent modulo \sim_K . Seien weiterhin x, y mit $x \sim_K e \sim_K y$.

Wegen $e \sim_K e^2$ erhalten wir $x^\omega x \sim_K x^\omega$. Nach der Definition von $x^\omega x \sim_K x^\omega$ folgt wegen $x^\omega (x^\omega x) \mathcal{R} x^\omega (x^\omega)$, dass $x^\omega x = x^\omega$ gilt. Andererseits gilt jedoch nach Definition von $x \sim_K y$ die Gleichung $x^\omega x = x^\omega y$. Insgesamt erhalten wir also $x^\omega y = x^\omega$. \square

Es gibt ein zu \sim_K analoges Kongruenzensystem bezüglich \mathbf{D} , für die duale Aussagen gelten. Wir werden dieses Kongruenzensystem jedoch nur implizit in Aussagen über duale Ergebnisse benutzen und deshalb nicht explizit einführen.

3.2 Familien von Kongruenzen $\triangleright_{k,n}$ und $\triangleleft_{k,n}$

In diesem Abschnitt definieren wir nach [KIW08] für ein gegebenes endliches Alphabet Γ induktiv zwei Familien von Relationen $\triangleright_{k,n}$ und $\triangleleft_{k,n}$ für $k, n \geq 0$ und zeigen, dass diese Relationen Kongruenzen sind. In Abschnitt 3.3 werden wir dann zeigen, dass diese die Varietäten \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k erzeugen.

Definition 3.7. Zunächst definieren wir $\triangleright_{k,n} = \triangleleft_{k,n} = \Gamma^* \times \Gamma^*$ für $n = 0$ oder $k = 0$. Induktiv definieren wir für $u, v \in \Gamma^*$ und $k, n \geq 1$, dass $u \triangleright_{k,n} v$ genau dann gilt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

2. $u \triangleleft_{k-1, n-1} v$
3. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ erfüllen die a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Forderungen $u_- \triangleleft_{k-1, n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k, n-1} v_+$

Links-rechts-symmetrisch hierzu definieren wir $u \triangleleft_{k, n} v$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$
2. $u \triangleright_{k-1, n-1} v$
3. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ erfüllen die a -rechts-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Forderungen $u_- \triangleleft_{k, n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k-1, n-1} v_+$

Das folgenden Lemmata stellen einige hilfreiche Eigenschaften von $\triangleright_{k, n}$ zusammen, die wir später benötigen werden. Für $\triangleleft_{k, n}$ gelten symmetrische Eigenschaften.

Lemma 3.8. *Seien $k, n \geq 0$, $u, v \in \Gamma^*$, dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Aus $u \triangleright_{k+1, n} v$ folgt $u \triangleright_{k, n} v$.*
2. *Aus $u \triangleright_{k, n+1} v$ folgt $u \triangleright_{k, n} v$.*
3. *Es gilt $u^{n+1} \triangleright_{k, n} u^n$.*

Beweis. Wir weisen Aussage 1 durch Induktion über k nach. Sei $u \triangleright_{k+1, n} v$. Für $k = 0$ oder $n = 0$ gilt $u \triangleright_{k, n} v$ für alle $u, v \in \Gamma^*$ und die Aussage gilt trivialerweise. Nehmen wir also $k, n \geq 1$ an, dann gilt aufgrund der Voraussetzung $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ und $u \triangleleft_{k, n-1} v$. Induktiv erhalten wir mit der dualen Aussage für $\triangleleft_{k, n-1}$ zunächst $u \triangleleft_{k-1, n-1} v$. Weiterhin gelten für alle $a \in \text{alph}(u)$ und die zugehörigen a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Bedingungen $u_- \triangleleft_{k, n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k+1, n-1} v_+$. Daraus folgt nach Induktionsvoraussetzung $u_- \triangleleft_{k-1, n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k, n-1} v_+$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $u \triangleright_{k, n} v$ gilt.

Aussage 2 beweisen wir durch Induktion über n . Für $k = 0$ oder $n = 0$ gilt $u \triangleright_{k, n} v$ die selbe Argumentation wie oben. Sei $k, n \geq 1$, dann gilt $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ und induktiv $\triangleleft_{k-1, n-1}$. Sei $a \in \text{alph}(u)$ mit den a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$, dann gilt $u_- \triangleleft_{k-1, n} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k, n} v_+$. Induktiv folgt $u_- \triangleleft_{k-1, n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k, n-1} v_+$ und damit schließlich $u \triangleright_{k, n} v$.

Der Beweis von Aussage 3 erfolgt mittels Induktion über n und für $k = 0$ oder $n = 0$ gilt die Aussage erneut trivialerweise. Seien im Folgenden $k, n \geq 1$. Die Alphabetsbedingung $\text{alph}(u^n) = \text{alph}(u^{n+1})$ folgt wegen $n > 0$ sofort. Induktiv gilt mit der dualen Aussage für $\triangleleft_{k-1, n-1}$ die Kongruenz $u^n \triangleleft_{k-1, n-1} u^{n-1}$ und schließlich mit der Kongruenzeigenschaft $u^{n+1} = u u^n \triangleleft_{k-1, n-1} u u^{n-1} = u^n$. Für $a \in \text{alph}(u)$ haben die a -links-Faktorisierungen die Form $u^{n+1} = u_- a u_+ u^n$ sowie $u^n = u_- a u_+ u^{n-1}$, wobei

$u = u_-au_+$ die a -links-Faktorisierung von u ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u^n \triangleright_{k,n-1} u^{n-1}$ und erneut mit der Kongruenzeigenschaft folgt $u_+u^n \triangleright_{k,n-1} u_+u^{n-1}$. Die Bedingung $u_- \triangleleft_{k-1,n-1} u_-$ ist trivialerweise erfüllt und wir haben $u^{n+1} \triangleright_{k,n} u^n$ gezeigt. \square

Lemma 3.9. *Seien $k \geq 2, n \geq 1, u, v \in \Gamma^*$ mit $u \triangleright_{k,n} v$, sowie $a \in \Gamma$ und $u = u_-au_+$ und $v = v_-av_+$ die a -links-Faktorisierungen von u und v , dann gilt $u_- \triangleright_{k,n-1} v_-$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n . Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise wahr. Sei im Folgenden $n \geq 2$. Zunächst gilt $\text{alph}(u_-) = \text{alph}(v_-)$ und mit $u \triangleright_{k,n} v$ folgt $u_- \triangleleft_{k-1,n-1} v_-$. Mit Lemma 3.8 folgt daraus $u_- \triangleleft_{k-1,n-2} v_-$ und es verbleibt noch Punkt 3 der Definition von $\triangleright_{k,n-1}$ für u_- und v_- nachzuweisen. Sei dazu $b \in \text{alph}(u_-)$ mit den zugehörigen b -links-Faktorisierungen $u_- = u'_-bu'_+$ sowie $v_- = v'_-bv'_+$. Da $u = u'_-b(u'_+au_+)$ und $v = v'_-b(v'_+av_+)$ die b -links-Faktorisierungen von u und v sind, folgt wegen $u \triangleright_{k,n} v$, dass $u'_- \triangleleft_{k-1,n-1} v'_-$ gilt, woraus erneut mit Lemma 3.8 $u'_- \triangleleft_{k-1,n-2} v'_-$ folgt. Andererseits gilt $u'_+au_+ \triangleright_{k,n-1} v'_+av_+$ und da $a \notin \text{alph}(u'_+) \cup \text{alph}(v'_+)$ ist, sind u'_+au_+ und v'_+av_+ a -links-Faktorisierungen. Induktiv erhalten wir $u'_+ \triangleright_{k,n-2} v'_+$. Damit sind alle Bedingungen für $u_- \triangleright_{k,n-1} v_-$ erfüllt. \square

Lemma 3.10. *Seien $n \geq 0$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann gilt $u \triangleright_{1,n} v$ genau dann, wenn u und v die selben Teilwörter der Länge n haben.*

Beweis. Seien $u, v \in \Gamma^*$. Die Behauptung gilt für $n = 0$ und es sei im Folgenden $n \geq 1$. Sei $u \triangleright_{1,n} v$ und $x = a_1a_2 \cdots a_m$ ein Teilwort von der Länge höchstens n von u . Wegen $u \triangleright_{1,n} v$ gilt $u_+ \triangleright_{1,n-1} v_+$ für die a_1 -links-Faktorisierungen $u = u_-a_1u_+$ und $v = v_-a_1v_+$. Außerdem ist $x' = a_2 \cdots a_m$ ein Teilwort der Länge höchstens $n - 1$ von u_- . Induktiv ist x' ein Teilwort von v_- und damit ist x ein Teilwort von v .

Nehmen wir an, u und v haben die selben Teilwörter der Länge höchstens n , dann gilt durch Betrachtung aller Teilwörter der Länge eins, dass $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ gilt. Sei $a \in \text{alph}(u)$ und die zugehörigen a -links-Faktorisierungen seien gegeben durch $u = u_-au_+$ und $v = v_-av_+$. Ist x' ein Teilwort der Länge höchstens $n - 1$ von u_+ , dann ist ax' ein Teilwort der Länge höchstens n von u und nach Voraussetzung auch von v . Wegen $a \notin \text{alph}(v_-)$ ist ax' ein Teilwort von av_+ und damit x' ein Teilwort von v_+ . Also haben u_+ und v_+ die selben Teilwörter der Länge höchstens $n - 1$ und induktiv folgt $u_+ \triangleright_{1,n-1} v_+$. Da die Bedingung $u_- \triangleleft_{0,n-1} v_-$ trivialerweise erfüllt ist folgt also $u \triangleright_{1,n} v$. \square

Lemma 3.11. *Für alle $k, n \geq 0$ sind $\triangleright_{k,n}$ und $\triangleleft_{k,n}$ Kongruenzen mit endlichem Index.*

Beweis. Aus Symmetriegründen betrachten wir den Beweis nur für $\triangleright_{k,n}$. Die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität von $\triangleright_{k,n}$ ergibt sich sofort mit einer Induktion nach

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

n . Es verbleibt zu zeigen, dass $\triangleright_{k,n}$ verträglich ist mit der Multiplikation. Seien dazu $u, v, x, y \in \Gamma^*$ mit $u \triangleright_{k,n} v$ und $x \triangleright_{k,n} y$. Wir führen eine Induktion über n . Für $k = 0$ oder $n = 0$ folgt sofort $ux \triangleright_{k,n} vy$ und wir nehmen im Folgenden $k, n \geq 1$ an. Nach Voraussetzung gilt $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ und $\text{alph}(x) = \text{alph}(y)$. Damit erhalten wir die Alphabetsbedingung $\text{alph}(ux) = \text{alph}(u) \cup \text{alph}(x) = \text{alph}(v) \cup \text{alph}(y) = \text{alph}(vy)$. Forderung 2 der Definition folgt unmittelbar wegen $u \triangleleft_{k-1,n-1} v$ und $x \triangleleft_{k-1,n-1} y$ und der Induktionsvoraussetzung. Sei für den Nachweis von Punkt 3 zunächst $a \in \text{alph}(u)$, dann gilt für die a -links-Faktorisierungen $ux = u_- a u_+ x$ und $vy = v_- a v_+ y$ wobei $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die a -links-Faktorisierungen von u und v sind. Wegen $u \triangleright_{k,n} v$ erhalten wir $u_- \triangleleft_{k-1,n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{k,n-1} v_+$. Aus $x \triangleright_{k,n} y$ folgt mit vorigem Lemma $x \triangleright_{k,n-1} y$. Induktiv ist $\triangleright_{k,n-1}$ eine Kongruenz und damit folgt $u_+ x \triangleright_{k,n-1} v_+ y$. Sei nun $a \in \text{alph}(x) \setminus \text{alph}(u)$, dann haben die a -links-Faktorisierungen die Form $ux = ux_- a x_+$ und $vy = vy_- a y_+$. Es folgt $x_+ \triangleright_{k,n-1} y_+$, $x_- \triangleleft_{k-1,n-1} y_-$ ähnlich wie oben schließlich $ux_- \triangleleft_{k-1,n-1} vy_-$. Damit ist für alle $a \in \text{alph}(ux) = \text{alph}(vy)$ Bedingung 3 erfüllt und insgesamt folgt $ux \triangleright_{k,n} vy$.

Wir zeigen per Induktion über n , dass $\triangleright_{k,n}$ endlichen Index hat. Zunächst hat $\triangleright_{k,n}$ für $k = 0$ oder $n = 0$ genau eine Äquivalenzklasse und die Aussage trifft zu. Nehmen wir $k, n \geq 1$ an. Für $u \in \Gamma^*$ schreiben wir $[u]_{\triangleright_{k,n}}$ von $\triangleright_{k,n}$, die u enthält und $[u] = \{v \in \Gamma^* \mid \text{alph}(v) = \text{alph}(u)\}$. Damit gilt

$$[u]_{\triangleright_{k,n}} = [u] \cap [u]_{\triangleleft_{k-1,n-1}} \cap \bigcap_{\substack{u = u_- a u_+ \\ a \notin \text{alph}(u_-)}} [u_-]_{\triangleleft_{k-1,n-1}} \cap [u_+]_{\triangleright_{k,n-1}}.$$

Induktiv gibt es nur endlich viele verschiedene Äquivalenzklassen von $\triangleleft_{k-1,n-1}$ und $\triangleright_{k,n-1}$. Damit und da der Schnitt endlich ist, gibt es nur endlich viele verschiedene Äquivalenzklassen von $\triangleright_{k,n}$. \square

3.3 Charakterisierungen der Hierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

Theorem 3.12. *Sei M ein endliches Monoid und $k \geq 2$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $M \in \mathbf{R}_k$
2. $M \in \llbracket \rho_k = \sigma_k \rrbracket$
3. $M \in \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$
4. $M \in \mathbf{K} \textcircled{+} \mathbf{L}_{k-1}$
5. M ist Quotient eines Monoids $\Gamma^* / \triangleright_{k,n}$ für ein endliches Alphabet Γ und $n \geq 0$

Symmetrisch dazu sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \in \mathbf{L}_k$
2. $M \in \llbracket \overline{\rho_k} = \overline{\sigma_k} \rrbracket$
3. $M \in \llbracket \varphi(\overline{G_k}) = \varphi(\overline{I_k}) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$
4. $M \in \mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{R}_{k-1}$
5. M ist Quotient eines Monoids $\Gamma^* / \triangleleft_{k,n}$ für ein endliches Alphabet Γ und $n \geq 0$

Dabei ist $\varphi: \Omega^* \rightarrow \Omega^*$ ein Homomorphismus, den wir im Folgenden einführen werden. Der Beweis von Theorem 3.12 wird sich in einem Unterabschnitt auf Seite 44 als Korollar einer Reihe von Propositionen und Lemmata ergeben, die wir im Folgenden anführen und beweisen. Dabei geben wir nur die entsprechenden Aussagen und Beweise für \mathbf{R}_k explizit an.

Wir definieren $\varphi: \Omega^* \rightarrow \Omega^*$ nach Trotter und Weil [TW97] als den eindeutigen Homomorphismus auf dem freien Monoid Ω^* , für den Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= (x_1^\omega x_2^\omega x_1^\omega)^\omega \\ \varphi(x_2) &= x_2^\omega \\ \varphi(x_k) &= (x_k^\omega (\varphi(\overline{G_{k-1}} G_{k-1}))^\omega x_k^\omega)^\omega \quad \text{für } k \geq 3. \end{aligned}$$

Wir halten zunächst eine wichtige Eigenschaft von φ bezüglich der in Definition 2.42 eingeführten Wörter G_k und I_k fest.

Lemma 3.13. *Sei $k \geq 2$ und $G_k, I_k \in \Omega^*$. Dann gilt $\text{alph}(\varphi(G_k)) = \Omega_k = \text{alph}(\varphi(I_k))$ und $\text{alph}(\varphi(x_k)) = \Omega_k$ für $k \geq 3$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage erneut nur für G_k . Zunächst haben wir $\text{alph}(\varphi(x_1)) = \Omega_2$ und $\text{alph}(\varphi(x_2)) = \{x_2\} \subseteq \Omega_2$. Da φ ein Homomorphismus von Ω^* in Ω^* ist, folgt $\text{alph}(\varphi(G_2)) = \{x_2\} \cup \Omega_2 = \Omega_2$. Damit gilt $\text{alph}(\varphi(x_3)) = \{x_3\} \cup \text{alph}(\varphi(G_2)) = \{x_3\} \cup \Omega_2 = \Omega_3$. Außerdem $\text{alph}(\varphi(G_3)) = \Omega_3 \cup \Omega_2 = \Omega_3$. Für $k \geq 4$ gilt induktiv $\text{alph}(\varphi(x_k)) = \{x_k\} \cup \text{alph}(\varphi(G_{k-1})) = \Omega_k$ und weiterhin $\text{alph}(G_k) = \text{alph}(\varphi(x_k)) \cup \text{alph}(\overline{G_{k-1}}) = \Omega_k \cup \Omega_{k-1}$. Dabei haben wir $\text{alph}(\varphi(x_k)) = \Omega_k$ verwendet. \square

Damit erhalten wir folgendes Korollar, das eine Gleichungsbeschreibung für den Schnitt von \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k angibt.

Korollar 3.14. *Sei $k \geq 3$, dann gilt $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k = \llbracket y\varphi(\overline{G_k} G_k)z = y\varphi(\overline{I_k} I_k)z \rrbracket_{\mathbf{DA}}$.*

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist trivialerweise erfüllt. Sei $M \in \mathbf{DA}$ ein Monoid, dass die Gleichung $y\varphi(\overline{G_k} G_k)z = y\varphi(\overline{I_k} I_k)z$ erfüllt. Weiterhin sei eine Belegung der Variablen x_1 bis x_k mit Werten in M gegeben, die wir ebenfalls mit x_1 bis x_k bezeichnen, um die Notation einfach zu halten. Wir setzen im Folgenden $y = \varphi(x_k)$ und $z = 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y\varphi(\overline{G_k} G_k)z &= \varphi(x_k)\varphi(\overline{G_k} G_k) \\ &= \varphi(x_k)\varphi(G_{k-1})\varphi(x_k)\varphi(x_k)\varphi(\overline{G_{k-1}}) && \text{mit } G_k = x_k \overline{G_{k-1}} \\ &= \varphi(x_k)\varphi(\overline{G_{k-1}}) && \text{mit } M \in \mathbf{DA} \\ &= \varphi(G_k). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt dabei aus der Idempotenz von $\varphi(x_k)$, sowie $M \in \mathbf{DA}$ mit Theorem 2.36 (7) und der Tatsache, dass $\varphi(x_k) \leq_{\mathcal{J}} \varphi(G_{k-1})$ gilt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} y\varphi(\overline{I_k} I_k)z &= \varphi(x_k)\varphi(\overline{I_k} I_k) \\ &= \varphi(x_k)\varphi(I_{k-1})\varphi(x_k)\varphi(G_k)\varphi(x_k)\varphi(I_k) && \text{mit } I_k = G_k x_k \overline{I_{k-1}}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.13 folgt, dass $\varphi(I_{k-1})\varphi(x_k)\varphi(G_k) \in M_{\varphi(x_k)}$ gilt. Damit gilt nach Theorem 2.36 (7) die Gleichung $y\varphi(\overline{I_k} I_k)z = \varphi(x_k)\varphi(I_k)$ und schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} y\varphi(\overline{I_k} I_k)z &= \varphi(x_k)\varphi(I_k) \\ &= \varphi(x_k)\varphi(G_k)\varphi(x_k)\varphi(\overline{I_{k-1}}) && \text{mit } I_k = G_k x_k \overline{I_{k-1}} \\ &= \varphi(x_k)\varphi(x_k)\varphi(\overline{G_{k-1}})\varphi(x_k)\varphi(\overline{I_{k-1}}) && \text{mit } G_k = x_k \overline{G_{k-1}} \\ &= \varphi(x_k)\varphi(\overline{G_{k-1}})\varphi(x_k)\varphi(\overline{I_{k-1}}) && \text{mit } \varphi(x_k) \text{ idempotent} \\ &= \varphi(I_k). \end{aligned}$$

Damit folgt aus $y\varphi(\overline{G_k} G_k)z = y\varphi(\overline{I_k} I_k)z$ mit $y = \varphi(x_k)$ und $z = 1$ die Gleichung $\varphi(G_k) = \varphi(I_k)$. Symmetrisch dazu lässt sich zeigen, dass mit $y = 1$ und $z = \varphi(x_k)$ die Gleichung $\varphi(\overline{G_k}) = \varphi(\overline{I_k})$ folgt. \square

Lemma 3.15. *Sei $M \in \llbracket \rho_k = \sigma_k \rrbracket$ ein endliches Monoid und $k \geq 2$, dann folgt $M \in \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass aus $\rho_k = \sigma_k$ in M eine charakteristische Gleichung für \mathbf{DA} von Theorem 2.36 folgt und damit $\mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{DA}$ gilt. Für $k = 2$ folgt aus $\rho_2 = \sigma_2$ mit der Idempotenz von ρ_2 die Gleichung $\rho_2 = \sigma_2\rho_2$, das heißt ausgeschrieben $(x_2 x_1)^\omega = (x_2 x_1)^\omega x_2 (x_2 x_1)^\omega$ und damit die Gleichung (5) in Theorem 2.36.

Sei nun $k \geq 3$. Wir setzen $x_k = \overline{\rho_{k-1}}$ für $k \geq 3$. Da $\overline{\rho_k}$ für alle $k \geq 2$ idempotent ist, ergibt sich $\rho_k = (x_k \overline{\rho_{k-1}})^\omega = (\overline{\rho_{k-1}} \overline{\rho_{k-1}})^\omega = \overline{\rho_{k-1}}$ für $k \geq 3$. Wir zeigen nun durch Induktion über $k \geq 3$, dass

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_2\rho_2, & \rho_k &= \rho_2 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \sigma_k &= \overline{\rho_2} \overline{\sigma_2}, & \rho_k &= \overline{\rho_2} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{aligned}$$

gilt. Damit folgt aus $\rho_k = \sigma_k$ Gleichung (5) in Theorem 2.36 für k gerade und Gleichung (4) für k ungerade. Die Aussage für ρ_k folgt sofort mittels Induktion aus obiger Beobachtung, dass $\rho_k = \overline{\rho_{k-1}}$ gilt. Es verbleibt, die Aussage für σ_k zu zeigen. Für $k = 3$ gilt $\sigma_3 = \overline{\rho_2 x_k \overline{\sigma_2}} = \overline{\rho_2 \overline{\sigma_2}}$. Für $k > 3$ gerade gilt induktiv

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \overline{\rho_k \overline{\sigma_{k-1}}} = \rho_2 \overline{\overline{\rho_2 \overline{\sigma_2}}} && \text{per Induktionsvoraussetzung und } k-1 \text{ ungerade} \\ &= \rho_2 \sigma_2 \rho_2 \\ &= \sigma_2 \rho_2 && \sigma_2 = \rho_2 x_2 \text{ und } \rho_2 \text{ idempotent,} \end{aligned}$$

sowie für k ungerade

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \overline{\rho_k \overline{\sigma_{k-1}}} = \overline{\rho_2 \overline{\sigma_2 \rho_2}} && \text{per Induktionsvoraussetzung und } k-1 \text{ gerade} \\ &= \overline{\rho_2 \overline{\rho_2 \overline{\sigma_2}}} \\ &= \overline{\rho_2 \overline{\sigma_2}}. \end{aligned}$$

Zunächst ist $\varphi(G_i)$ in \mathbf{DA} idempotent für alle $i \geq 2$, denn

$$\begin{aligned} (\varphi(G_2))^2 &= x_2^\omega (x_1^\omega x_2^\omega x_1^\omega)^\omega x_2^\omega (x_1^\omega x_2^\omega x_1^\omega)^\omega \\ &= x_2^\omega (x_1^\omega x_2^\omega x_1^\omega)^\omega = \varphi(G_2) \end{aligned}$$

und für $i > 2$ gilt

$$(\varphi(G_i))^2 = \varphi(x_i) \varphi(\overline{G_{i-1}}) \varphi(x_i) \varphi(\overline{G_{i-1}}) = \varphi(x_i) \varphi(\overline{G_{i-1}}) = \varphi(G_i).$$

Wir zeigen nun, dass substituieren der Variablen x_i durch $\varphi(x_i)$ in ρ_k in \mathbf{DA} auf $\varphi(G_k)$ führt. Der Beweis erfolgt induktiv über k . Für $k = 2$ erhalten wir durch die Substitution $(\varphi(x_2) \varphi(x_1))^\omega = (\varphi(G_2))^\omega = \varphi(G_2)$. Für $k \geq 3$ erhalten wir induktiv

$$(\varphi(x_k) \varphi(\overline{G_{k-1}}))^\omega = (\varphi(x_k \overline{G_{k-1}}))^\omega = \varphi(x_k \overline{G_{k-1}}) = \varphi(G_k).$$

Führen wir die selbe Substitution in σ_k durch, erhalten wir für $k = 2$ zunächst $\varphi(G_2) \varphi(x_2) = \varphi(I_2)$ und damit induktiv $\varphi(G_k) \varphi(x_k) \varphi(\overline{I_{k-1}}) = \varphi(I_k)$ für $k \geq 3$. Insgesamt folgt mit diesen Betrachtungen aus $\rho_k = \sigma_k$ die Gleichung $\varphi(G_k) = \varphi(I_k)$. □

Proposition 3.16. *Sei $M \in \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$ ein endliches Monoid und $k \geq 3$, dann gilt $M \in \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \llbracket \varphi(\overline{G_{k-1}}) = \varphi(\overline{I_{k-1}}) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für alle Belegungen der Variablen x_1, x_2, \dots, x_{k-1} mit Werten in M die Äquivalenz $\varphi(\overline{G_{k-1}}) \sim_{\mathbf{K}} \varphi(\overline{I_{k-1}})$ erfüllt ist. Es sei nun eine solche Belegung der Variablen gegeben, die wir wieder mit x_i bezeichnen, um die Notation einfach zu halten.

Sei weiterhin e ein idempotentes Element von M . Wir setzen $x_k = e$. Sei nun $e\varphi(\overline{G_{k-1}}) \mathcal{R} e$. Nach Lemma 3.13 ist $\varphi(\overline{G_{k-1}})$ aus den Variablen x_1 bis x_{k-1} aufgebaut und jede Variable kommt vor, woraus insbesondere $e \leq_{\mathcal{J}} x_i$ folgt für $1 \leq i \leq k-1$. Damit gilt $\varphi(\overline{G_{k-1}G_{k-1}}) \in M_e$. Nach Theorem 2.36 (7) gilt $\varphi(x_k) = (x_k^\omega (\varphi(\overline{G_{k-1}G_{k-1}}))^\omega x_k^\omega)^\omega = (e(\varphi(\overline{G_{k-1}G_{k-1}}))^\omega e)^\omega = e$. Unter Anwendung der Identität $\varphi(G_k) = \varphi(I_k)$ für die Belegung gilt nun

$$\begin{aligned} e\varphi(\overline{G_{k-1}}) &= \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \\ &= \varphi(x_k \overline{G_{k-1}} x_k \overline{I_{k-1}}) \\ &= e\varphi(\overline{G_{k-1}}) e\varphi(\overline{I_{k-1}}) \\ &= e\varphi(\overline{I_{k-1}}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\varphi(\overline{G_{k-1}}) \in M_e$ mit der selben Argumentation wie oben gilt.

Für den Fall $e\varphi(\overline{I_{k-1}}) \mathcal{R} e$ stellen wir mit Lemma 3.13 zunächst fest, dass $\varphi(\overline{I_{k-1}})$ und $\varphi(\overline{G_{k-1}})$ aus den selben Variablen aufgebaut sind. Deshalb gilt auch in diesem Fall $e \leq_{\mathcal{J}} x_i$ für $1 \leq i \leq k-1$ und mit der selben Schlussweise wie oben erhalten wir wieder $e\varphi(\overline{G_{k-1}}) = e\varphi(\overline{I_{k-1}})$ und damit insgesamt $\varphi(\overline{G_{k-1}}) \sim_{\mathbf{K}} \varphi(\overline{I_{k-1}})$. \square

Proposition 3.17 (Kuffleitner und Weil [KIW08]). *Sei M ein endliches Monoid, sowie $k = 1$ und $M \in \mathbf{J}$ oder $k \geq 2$ und $M \in \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{L}_{k-1}$, dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\mu: \Gamma^*/\triangleright_{k,n} \rightarrow M$ für ein endliches Alphabet Γ und $n \geq 0$.*

Beweis. Wir geben den Beweis nach [KIW08] an und führen eine Induktion über k . Für $k = 1$ zeigt Lemma 3.10, dass genau dann $u \triangleleft_{k,n} v$ gilt, wenn u und v die selben Teilwörter bis zur Länge n haben und die Behauptung folgt nach einem bekannten Resultat von Simon über sogenannte stückweise prüfbare Sprachen¹, wonach jedes Monoid in \mathbf{J} ein Quotient eines Monoids der Form $\Gamma^*/\triangleright_{k,1}$ ist.

Sei Γ ein endliches Alphabet, $k \geq 2$, $M \in \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{L}_{k-1}$ und $\gamma: \Gamma^* \rightarrow M$ ein surjektiver Homomorphismus. Wegen $M \in \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{L}_{k-1}$ gibt es ein endliches Monoid T , ein Monoid $N \in \mathbf{L}_{k-1}$ und surjektive Homomorphismen $\alpha: T \rightarrow M$, sowie $\beta: T \rightarrow N$, sodass $\beta^{-1}(e) \in \mathbf{K}$ für alle Idempotenten $e \in N$ gilt². Wegen der universellen Eigenschaft des freien Monoids Γ^* und der Surjektivität von α gibt es einen Homomorphismus $\tau: \Gamma^* \rightarrow T$, sodass $\gamma = \tau\alpha$ gilt. Des Weiteren können wir durch Restriktion auf den Bildbereich $\tau(\Gamma^*)$ annehmen, dass τ surjektiv ist.

Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Zahl $n' \geq 0$ und einen surjektiven Homomorphismus $\delta': \Gamma^*/\triangleleft_{k-1,n'} \rightarrow N$, sodass $\tau\beta = \delta\delta'$ mit der natürlichen Projektion $\delta: \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*/\triangleleft_{k-1,n'}$.

¹Im Englischen „piecewise-testable“ siehe [Pin86].

²Diese Aussage wurde in dieser Arbeit nicht bewiesen, siehe beispielsweise [Pin86].

Wir zeigen per Induktion über $\text{alph}(u)$, dass mit $n \geq (|M| + 1) |\text{alph}(u)| + n' + 1$ die Implikation

$$u \triangleright_{k,n} v \Rightarrow \gamma(u) = \gamma(v)$$

für alle $u, v \in \Gamma^*$ gilt. Seien $u, v \in \Gamma^*$. Für $|\text{alph}(u)| = 0$ folgt $|\text{alph}(v)| = 0$ wegen $n > 0$ und damit $u = \varepsilon = v$.

Sei im Folgenden $|\text{alph}(u)| \geq 1$ und $u \triangleright_{k,n} v$. Wir faktorisieren u wie im Beweis von Proposition 2.41, sodass $u = u_0 a_1 u_1 \cdots a_m u_m$ mit $u_i \in \Gamma^*$, $a_i \in \Gamma$ und folgende Bedingungen gelten:

- $1 \mathcal{R} \gamma(u_0)$,
- $\gamma(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i) \mathcal{R} \gamma(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i)$ für $1 \leq i \leq m$,
- $\gamma(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i) \triangleright_{\mathcal{R}} \gamma(u_0 a_1 u_1 \cdots a_i u_i a_{i+1})$ für $1 \leq i < m$.

Wegen Lemma 2.34 haben wir $\gamma(u_{i-1}) \not\leq_{\mathcal{J}} \gamma(a_i)$ und damit $a_i \notin \text{alph}(u_{i-1})$. Eine einfache Induktion nach m mit der Aussage von Lemma 3.9 zeigt, dass dies eine Faktorisierung

$$v = v_0 a_1 v_1 \cdots a_m v_m$$

induziert, wobei $u_i \triangleright_{k,n-i-1} v_i$ für $0 \leq i \leq m$ und $a_{i+1} \notin \text{alph}(v_i)$ für $0 \leq i \leq m-1$. Im Bereich $0 \leq i \leq m-1$ gilt für die Indizes

$$\begin{aligned} n - i - 1 &\geq (|M| + 1) |\text{alph}(u)| + n' + 1 - (|M| - 1) - 1 && \text{mit } i \leq m - 1 \leq |M| - 1 \\ &\geq (|M| + 1)(|\text{alph}(u_i)| + 1) + n' + 1 - |M| && \text{mit } |\text{alph}(u)| > |\text{alph}(u_i)| \\ &= (|M| + 1) |\text{alph}(u_i)| + n' + 1 \end{aligned}$$

und wir können induktiv $\gamma(u_i) = \gamma(v_i)$ für $0 \leq i \leq m-1$ annehmen. Im Folgenden sei $u' = u_0 a_1 u_1 \cdots a_m$ und $v' = v_0 a_1 v_1 \cdots a_m$. Aus den vorhergehenden Betrachtungen wissen wir, dass $\gamma(u') = \gamma(v')$ und $u_m \triangleright_{k,n-m-1} v_m$ gelten. Daraus folgt, dass $u_m \triangleleft_{k-1,n-m-2} v_m$ gilt und wegen $|u| \geq 1$ folgt $n-m-2 \geq n'$ und damit $u_m \triangleleft_{k-1,n'} v_m$ nach Lemma 3.8.

Außerdem gibt es ein $x \in \Gamma^*$, sodass $\gamma(u' u_m x) = \gamma(u')$. Wir setzen $y = (x u_m)^{\omega-1} x$ und erhalten $(x u_m)^{\omega} = y u_m \triangleleft_{k-1,n'} y v_m$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} \delta \delta'(y u_m) &= \delta \delta'((x u_m)^{\omega}) = \delta \delta'(y v_m) && \text{und damit} \\ \tau \beta(y u_m) &= \tau \beta((x u_m)^{\omega}) = \tau \beta(y v_m). \end{aligned}$$

Da $\beta^{-1}(e) \in \mathbf{K}$ für alle Idempotenten $e \in N$, folgt mit $\tau(y v_m), \tau((x u_m)^{\omega}) \in \beta^{-1}(f)$ für $f = \tau \beta((x u_m)^{\omega})$, dass $\tau((x u_m)^{\omega} y v_m) = \tau((x u_m)^{\omega})$ gilt. Damit und $\gamma = \tau \alpha$ folgt wiederum

$$\gamma((x u_m)^{\omega} y v_m) = \gamma((x u_m)^{\omega}).$$

Damit können wir schließen, dass

$$\begin{aligned}
 \gamma(u) &= \gamma(u'u_m) = \gamma(u'u_m(xu_m)^\omega) \\
 &= \gamma(u'u_m(xu_m)^\omega y v_m) \\
 &= \gamma(u'u_m(xu_m)^\omega (xu_m)^{\omega-1} x v_m) \quad \text{mit } y = (xu_m)^{\omega-1} x \\
 &= \gamma(u'(xu_m)^{2\omega} v_m) \\
 &= \gamma(u'v_m) \\
 &= \gamma(v'v_m) \quad \text{mit } \gamma(u') = \gamma(v') \\
 &= \gamma(v)
 \end{aligned}$$

gilt. Dies zeigt $\gamma(u) = \gamma(v)$ und schließt damit den Beweis. \square

Lemma 3.18. *Sei Γ ein endliches Alphabet, $k \geq 2$ und $n \geq 0$, dann ist $\Gamma^*/\triangleright_{k,n} \in \mathbf{R}_k$.*

Beweis. Wir weisen nach, dass für alle Belegungen von x_1 bis x_k mit Werten in Γ^* die Gleichung $\rho_k = \sigma_k$ in $\Gamma^*/\triangleright_{k,n}$ erfüllt ist und halten eine solche Belegung fest. Wir bezeichnen die Belegung einer Variable und die Variable selbst mit x_i . Wir werden für diesen Beweis die Vorkommen von ω in ρ_k und σ_k als Zahl auffassen und mittels Induktion über n zeigen, dass $\rho_k \triangleright_{k,n} \sigma_k$ für alle $\omega \geq n$ gilt.

Zunächst ist für $k = 0$ oder $n = 0$ die Aussage trivialerweise erfüllt und es sei im Folgenden $k, n \geq 1$. Wie leicht zu sehen ist, sind ρ_k und σ_k aus den selben Variablen aufgebaut und damit gilt für die Belegung dieser Wörter $\text{alph}(\rho_k) = \text{alph}(\sigma_k)$. Für $a \in \text{alph}(\rho_k)$ sind die a -links-Faktorisierungen von ρ_k und σ_k gegeben durch $\rho_k = \rho' a \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1}$ und $\sigma_k = \rho' a \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\sigma_k}$. Nach Lemma 3.8 (3) können wir Potenzen der Form x^ω auf Potenzen der Form $x^{\omega-1}$ modulo $\triangleright_{k,n-1}$ reduzieren. Induktiv folgt $(x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} \triangleright_{k,n-1} (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\sigma_k}$ für $\omega - 1 \geq n - 1$ und da $\triangleright_{k,n-1}$ eine Kongruenz ist $\rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} \triangleright_{k,n-1} \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\sigma_k}$. Die Bedingung $\rho' \triangleleft_{k-1,n-1} \rho'$ ist trivialerweise erfüllt und es verbleibt $\rho_k \triangleleft_{k-1,n-1} \sigma_k$ nachzuweisen. Es gilt induktiv $\overline{\sigma_{k-1}} \triangleleft_{k-1,n-1} \overline{\rho_{k-1}}$ für alle $\omega \geq n - 1$ und damit erhalten wir für $\omega \geq n \geq n - 1$ die Kongruenz

$$\begin{aligned}
 \sigma_k &= (x_k \overline{\rho_{k-1}})^\omega x_k \overline{\sigma_{k-1}} \\
 &\triangleleft_{k-1,n-1} (x_k \overline{\rho_{k-1}})^\omega x_k \overline{\rho_{k-1}} \\
 &\triangleleft_{k-1,n-1} (x_k \overline{\rho_{k-1}})^\omega = \rho_k.
 \end{aligned}$$

Die letzte Kongruenz gilt dabei aufgrund von Lemma 3.8 (3). \square

Beweis von Theorem 3.12

Die Äquivalenz von Punkt 1 und Punkt 2 gilt nach Definition. Implikation „2 \Rightarrow 3“ ist die Aussage von Lemma 3.15

Für die Folgerung „3 \Rightarrow 4“ behandeln wir zunächst $k = 2$: Es ist $M \in \mathbf{DA}$ gegeben, sodass $\varphi(G_2) = \varphi(I_2)$ in M gilt und wir wollen $M/\sim_K \in \mathbf{J}$ nachweisen. Durch Umklammern und Ausnutzen der Idempotenz und Aperiodizität ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung in M äquivalent zu $(x_2^\omega x_1^\omega)^\omega = (x_2^\omega x_1^\omega)^\omega x_2^\omega$ ist. Sei $e^2 = e \in M$ und ohne Einschränkung $e(x_2 x_1)^\omega \mathcal{R} e$. Daraus erhalten wir $e \leq_{\mathcal{J}} x_2$, $e \leq_{\mathcal{J}} x_1$, $(x_2 x_1)^\omega \in M_e$ und mit $M \in \mathbf{DA}$ und Theorem 2.36 (7) folgt $e = e(x_2 x_1)^\omega e = e((x_2 x_1)^\omega e)^\omega$. Anwenden obiger Identität liefert $e = e((x_2 x_1)^\omega e)^\omega (x_2 x_1)^\omega$ und schließlich $e = e(x_2 x_1)^\omega$. Andererseits ist $(x_1 x_2)^\omega \in M_e$ und auf die gleiche Weise erhalten wir $e = e(x_1 x_2)^\omega$ und damit $(x_2 x_1)^\omega \sim_K (x_1 x_2)^\omega$. Der Fall $k \geq 3$ folgt dann induktiv mit Hilfe von Proposition 3.16 und dessen dualer Aussage.

Die Richtung „4 \Rightarrow 5“ wurde in Proposition 3.17 gezeigt. Die letzte zu zeigende Implikation „5 \Rightarrow 1“ folgt aus Lemma 3.18 und dem Abschluss von \mathbf{R}_k unter Bildung von Quotienten.

3.4 Hierarchien unterhalb von DA

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k ($k \geq 1$) zwei Hierarchien von Varietäten bilden und wir werden zeigen, wie die beiden Hierarchien zusammenhängen. An Punkt 3 von Theorem 3.12 sehen wir, dass sich die Hierarchie unterhalb von \mathbf{DA} befindet. In diesem Abschnitt zeigen wir darüber hinaus, dass die Hierarchien \mathbf{DA} erschöpfen, das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{DA} &= \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k \quad \text{und} \\ \mathbf{DA} &= \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{L}_k. \end{aligned} \tag{3.5}$$

In Abschnitt 3.5 werden wir außerdem zeigen, dass die Hierarchie echt ist, also $\mathbf{R}_k \subsetneq \mathbf{R}_{k+1}$ beziehungsweise $\mathbf{L}_k \subsetneq \mathbf{L}_{k+1}$ gilt.

Das folgende Lemma zeigt zunächst, dass \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k ($k \geq 1$) Hierarchien von Varietäten sind.

Lemma 3.19. *Für $k \geq 1$ gilt $\mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{R}_{k+1}$ und $\mathbf{L}_k \subseteq \mathbf{L}_{k+1}$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für \mathbf{R}_k durch Induktion über k , die entsprechende Aussage für \mathbf{L}_k folgt analog dazu. Für $k = 1$ ist mit Lemma 2.24 $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J} \supseteq \mathbf{J} = \mathbf{R}_k$. Mit $k \geq 2$ schließen wir induktiv $\mathbf{L}_k \supseteq \mathbf{L}_{k-1}$ und folgern $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{L}_k \supseteq \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{L}_{k-1} = \mathbf{R}_k$, da das Mal'cev-Produkt nach Lemma 2.24 monoton ist. \square

Als Nächstes klären wir die gegenseitige Lage der \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k .

Lemma 3.20. *Für $k \geq 2$ gelten:*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k-1} &\subseteq \mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{L}_{k+1} \\ \mathbf{R}_{k-1} &\subseteq \mathbf{L}_k \subseteq \mathbf{R}_{k+1} \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt $\mathbf{L}_{k-1} \subseteq \mathbf{R}_k$ zu zeigen. Die Aussage $\mathbf{R}_{k-1} \subseteq \mathbf{L}_k$ folgt dann analog dazu und die restlichen Aussagen ergeben sich durch Verschieben der Indizes. Es gilt $\mathbf{R}_k = \mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{L}_{k-1}$, woraus mit Lemma 2.24 direkt die geforderte Behauptung folgt. \square

In Abschnitt 3.5 zeigt Korollar 3.28, dass \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k für alle k unvergleichbar sind, also $\mathbf{R}_k \not\subseteq \mathbf{L}_k$ und $\mathbf{L}_k \not\subseteq \mathbf{R}_k$.

Lemma 3.21. *Sei $n \geq 1$, dann gilt $\triangleright_{2n,2n} \subseteq \equiv_n^{\text{DA}}$ und $\triangleleft_{2n,2n} \subseteq \equiv_n^{\text{DA}}$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage $\triangleright_{2n,2n} \subseteq \equiv_n^{\text{DA}}$ mittels Induktion über n . Der Beweis von $\triangleleft_{2n,2n}$ erfolgt analog dazu. Für $n = 0$ gilt $\triangleright_{2n,2n} = \Gamma^* \times \Gamma^* = \equiv_n^{\text{DA}}$. Seien $n \geq 1$ und $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \triangleright_{2n,2n} v$. Wegen $2n > 0$ gilt die Alphabetsbedingung $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$. Sei $a \in \text{alph}(u)$, dann gelten für die a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Bedingungen $u_- \triangleleft_{2n-1,2n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright_{2n,2n-1} v_+$. Mit Lemma 3.8 und der Induktionsvoraussetzung folgt $u_- \equiv_{n-1}^{\text{DA}} v_-$ und $u_+ \equiv_{n-1}^{\text{DA}} v_+$. Außerdem folgt aus $u \triangleright_{2n,2n} v$ die Kongruenz $u \triangleleft_{2n-1,2n-1} v$. Betrachten wir die a -rechts-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$, dann erhalten wir $u_- \triangleleft_{2n-1,2(n-1)} v_-$ und $u_+ \triangleright_{2(n-1),2(n-1)} v_+$ und erneut mit Lemma 3.8 und der Induktionsvoraussetzung $u_- \equiv_{n-1}^{\text{DA}} v_-$ und $u_+ \equiv_{n-1}^{\text{DA}} v_+$. Damit folgt $u \equiv_n^{\text{DA}} v$ nach Definition 2.37. \square

Lemma 3.22. *Sei $M \in \mathbf{DA}$, dann ist $M \in \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k$.*

Beweis. Betrachte $N = \Gamma^* / \equiv_n^{\text{DA}}$ für ein endliches Alphabet Γ und $n \geq 0$. Wegen Lemma 3.21 gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\Gamma^* / \triangleright_{2n,2n} \twoheadrightarrow N$. Ist M in \mathbf{DA} , dann ist M Quotient eines Monoids N dieser Form, das heißt es gibt einen surjektiven Homomorphismus $N \twoheadrightarrow M$. Damit haben wir $\Gamma^* / \triangleright_{2n,2n} \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow M$ oder anders ausgedrückt ist M ein Quotient des Monoids $\Gamma^* / \triangleright_{2n,2n}$. Nach Theorem 3.12 (5) folgt $M \in \mathbf{R}_{2n}$. \square

Wie oben angesprochen, gilt auch die umgekehrte Richtung, was wir im Folgenden formal festhalten.

Lemma 3.23. *Sei $M \in \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k$, dann ist $M \in \mathbf{DA}$.*

Beweis. Da $M \in \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k$, gibt es ein $k \geq 1$, sodass $M \in \mathbf{R}_k$. Nach Punkt 3 von Theorem 3.12 folgt $\mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{DA}$ und damit $M \in \mathbf{DA}$. \square

Die beiden letzten Aussagen zusammen ergeben die oben behauptete Aussage, dass \mathbf{R}_k ($k \geq 1$) die Varietät \mathbf{DA} erschöpft. Zusammen mit dualen Resultaten für \mathbf{L}_k ($k \geq 1$) ergibt sich das folgende Theorem.

Theorem 3.24. $\mathbf{DA} = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{L}_k$

3.5 Zusammenhang zu Band-Varietäten

Trotter und Weil haben in der Arbeit [TW97] gezeigt, dass durch die Abbildung $\pi_{\mathbf{B}}: Ps(\mathbf{DA}) \rightarrow Ps(\mathbf{B})$, $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V} \cap \mathbf{B}$, die eine Untervarietät von \mathbf{DA} auf den Schnitt mit \mathbf{B} abbildet, ein Homomorphismus zwischen den vollständigen Verbänden $Ps(\mathbf{DA})$ und $Ps(\mathbf{B})$ ist. Dort wird außerdem gezeigt, dass die Äquivalenzklasse aller Untervarietäten von \mathbf{DA} , die auf die selbe Untervarietät von \mathbf{B} abgebildet werden, ein *Intervall von Varietäten* ist, das heißt es gibt für $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{B}$ eine kleinste Untervarietät \mathbf{Z}_{\downarrow} und eine größte Untervarietät \mathbf{Z}^{\uparrow} von \mathbf{DA} , sodass $\pi_{\mathbf{B}}^{-1}(\mathbf{Z}) = [\mathbf{Z}_{\downarrow}, \mathbf{Z}^{\uparrow}]$ oder äquivalent dazu $\mathbf{V} \cap \mathbf{B} = \mathbf{Z}$ genau dann, wenn $\mathbf{Z}_{\downarrow} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Z}^{\uparrow}$. Das Minimum des von \mathbf{Z} induzierten Intervalls ist \mathbf{Z} selbst, das heißt $\mathbf{Z}_{\downarrow} = \mathbf{Z}$. Trotter und Weil haben darüber hinaus Gleichungen für \mathbf{Z}^{\uparrow} angegeben, falls $\mathbf{Z} = \mathbf{B}_k^r = \llbracket G_k = I_k \rrbracket_{\mathbf{B}}$ oder $\mathbf{Z} = \mathbf{B}_k^l = \llbracket \overline{G_k} = \overline{I_k} \rrbracket_{\mathbf{B}}$ für ein $k \geq 2$ (siehe Abschnitt 2.6 auf Seite 29) und gezeigt, dass folgende Aussagen gelten:

Proposition 3.25 (Proposition 4.6 in [TW97]). *Sei $k \geq 2$.*

1. *Ist $\mathbf{Z} = \llbracket G_k = I_k \rrbracket_{\mathbf{B}}$, dann gilt $\mathbf{Z}^{\uparrow} = \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$.*
2. *Ist $\mathbf{Z} = \llbracket \overline{G_k} = \overline{I_k} \rrbracket_{\mathbf{B}}$, dann gilt $\mathbf{Z}^{\uparrow} = \llbracket \varphi(\overline{G_k}) = \varphi(\overline{I_k}) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$.*

Proposition 3.26 (Proposition 4.3 in [TW97]). *Sei $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{B}$, falls $(\mathbf{LZ} \textcircled{\text{m}} \mathbf{Z})^{\uparrow}$ und $(\mathbf{RZ} \textcircled{\text{m}} \mathbf{Z})^{\uparrow}$ existieren, dann existiert auch \mathbf{Z}^{\uparrow} und es gilt $\mathbf{Z}^{\uparrow} = (\mathbf{LZ} \textcircled{\text{m}} \mathbf{Z})^{\uparrow} \cap (\mathbf{RZ} \textcircled{\text{m}} \mathbf{Z})^{\uparrow}$.*

Zusammen mit Theorem 3.12 ergibt sich also folgendes Korollar:

Korollar 3.27. *Sei $k \geq 1$, dann sind \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k maximal in den durch $\mathbf{V} \cap \mathbf{B}$ induzierten Intervallen, das heißt $\mathbf{R}_k = \mathbf{Z}^{\uparrow}$ falls $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{B} = \mathbf{Z}$ und $\mathbf{L}_k = \mathbf{Z}^{\uparrow}$ falls $\mathbf{L}_k \cap \mathbf{B} = \mathbf{Z}$.*

Weiterhin ist der Schnitt von \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k maximal in dem Intervall, das ihn enthält, das heißt $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k = \mathbf{Z}^{\uparrow}$, falls $\mathbf{Z} = (\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k) \cap \mathbf{B}$.

Beweis. Für $k = 1$ ist dies die Aussage von Proposition 4.1 in [TW97] und für $k \geq 2$ gilt nach Theorem 3.12 $\mathbf{R}_k = \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}}$ und mit der zitierten Proposition 3.25 folgt schließlich $\mathbf{R}_k = \mathbf{Z}^{\uparrow}$ mit $\mathbf{Z} = \llbracket G_k = I_k \rrbracket_{\mathbf{B}} = \llbracket \varphi(G_k) = \varphi(I_k) \rrbracket_{\mathbf{DA}} \cap \mathbf{B} = \mathbf{R}_k \cap \mathbf{B}$.

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

Sei $k \geq 2$, dann gilt nach Proposition 3.26

$$\begin{aligned} ((\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k) \cap \mathbf{B})^\dagger &= ((\mathbf{R}_k \cap \mathbf{B}) \cap (\mathbf{L}_k \cap \mathbf{B}))^\dagger \\ &= (\mathbf{R}_k \cap \mathbf{B})^\dagger \cap (\mathbf{L}_k \cap \mathbf{B})^\dagger \end{aligned}$$

und damit $((\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k) \cap \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k$ nach dem eben Bewiesenen. \square

Es ist bekannt, dass die Hierarchien $(\mathbf{B}_k^r)_{k \geq 1}$ und $(\mathbf{B}_k^l)_{k \geq 1}$ innerhalb der Bands echt ist (siehe Abschnitt 2.6). Damit und mit Theorem 3.12 haben wir folgendes Korollar:

Korollar 3.28. *Sei $k \geq 1$, dann gilt:*

1. Für $k \geq 2$ sind \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k unvergleichbar.
2. Die Hierarchie $(\mathbf{R}_k)_{k \geq 1}$ ist echt, das heißt $\mathbf{R}_{k+1} \subsetneq \mathbf{R}_k$.
3. Die Hierarchie $(\mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$, ist echt, das heißt $\mathbf{L}_{k+1} \subsetneq \mathbf{L}_k$.
4. Die Hierarchie $(\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$, ist echt, das heißt $\mathbf{R}_{k+1} \cap \mathbf{L}_{k+1} \subsetneq \mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k$.
5. Die Hierarchie $(\mathbf{R}_k \vee \mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$, ist echt, das heißt $\mathbf{R}_{k+1} \vee \mathbf{L}_{k+1} \subsetneq \mathbf{R}_k \vee \mathbf{L}_k$.

Beweis. Nehmen wir an, Aussage 1 ist falsch und ohne Einschränkung gibt es ein $k \geq 2$, sodass $\mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{L}_k$ gilt. Aus Symmetriegründen folgt dann $\mathbf{R}_k = \mathbf{L}_k$ und deshalb $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{L}_k = \mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k$, da \mathbf{R}_k für $k \geq 2$ abgeschlossen unter dem Mal'cev-Produkt mit \mathbf{K} von links ist. Damit gilt $\mathbf{L}_{k+1} = \mathbf{D} \textcircled{m} \mathbf{R}_k = \mathbf{D} \textcircled{m} \mathbf{R}_{k+1}$ und nach Lemma 2.24 folgt $\mathbf{L}_{k+1} \supseteq \mathbf{R}_{k+1}$. Induktiv gilt dann $\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i$ für alle $i \geq k$ und damit kollabiert die Hierarchie ab der Ebene k . Wir wissen aber, dass $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{B} = \mathbf{B}_k^r$ gilt, damit $\mathbf{B}_i^r = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{B} = \mathbf{R}_{i+1} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B}_{i+1}^r$ für $i \geq k$. Also würde die Hierarchie innerhalb der Bands ab Ebene k kollabieren, ein Widerspruch.

Gäbe es im Widerspruch zu Aussage 2 ein $k \geq 1$ mit $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k$, dann würde $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{K} \textcircled{m} \mathbf{L}_k$ gelten und mit Lemma 2.24 wäre $\mathbf{R}_k \supseteq \mathbf{L}_k$ und damit \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k im Widerspruch zu Punkt 1 vergleichbar. Aussage 3 folgt analog dazu.

Wir zeigen Aussage 4 durch einen Widerspruch: Wir wissen, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k &\subseteq \mathbf{R}_k \subseteq \mathbf{R}_{k+1} \cap \mathbf{L}_{k+1} \\ \mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k &\subseteq \mathbf{L}_k \subseteq \mathbf{R}_{k+1} \cap \mathbf{L}_{k+1} \end{aligned}$$

und damit $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k = \mathbf{R}_k = \mathbf{L}_k = \mathbf{R}_{k+1} \cap \mathbf{L}_{k+1}$ falls $\mathbf{R}_k \cap \mathbf{L}_k = \mathbf{R}_{k+1} \cap \mathbf{L}_{k+1}$ für ein $k \geq 1$ gelten würde. Dies ist erneut ein Widerspruch zu Aussage 1. Aussage 5 folgt analog dazu. \square

3.6 Alternative Familie von Kongruenzen

Wir halten zunächst folgende Beobachtung fest.

Lemma 3.29. *Es gilt $\mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}_1 = \mathbf{R}$ und $\mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}_1 = \mathbf{L}$.*

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage, die zweite Gleichheit folgt analog. Mit Theorem 3.12 wissen wir, dass gilt $\mathbf{R} = \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}$. Deshalb und mit Lemma 2.24 folgt $\mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J} = \mathbf{R}$. Sei für die umgekehrte Inklusion $M \in \mathbf{R}$ ein \mathcal{R} -triviales Monoid. Wir zeigen $M/\sim_{\mathbf{K}} \in \mathbf{J}_1$. Seien dazu x, y und $e^2 = e \in M$ und $exx \mathcal{R} e$, dann folgt $ex \mathcal{R} e$ und da M \mathcal{R} -trivial ist, $exx = ex$, also $xx \sim_{\mathbf{K}} e$. Sei weiterhin ohne Einschränkung $exy \mathcal{R} \mathbf{R}$, dann folgt $ex \mathcal{R} e$ und erneut mit M \mathcal{R} -trivial $ex = e$. Damit folgt $exy = ey \mathcal{R} e$ und schließlich $eyx = ex = eyx$ und damit $xy \sim_{\mathbf{K}} yx$. Also ist $M/\sim_{\mathbf{K}}$ idempotent und kommutativ und damit in \mathbf{J}_1 enthalten. \square

Mit diesem Lemma haben wir $\mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}_1 = \mathbf{R} = \mathbf{K} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}$ und symmetrisch $\mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}_1 = \mathbf{L} = \mathbf{D} \textcircled{\text{m}} \mathbf{J}$, das heißt anstatt in Gleichung 3.2 die Hierarchie mit \mathbf{J} zu starten, wäre es möglich \mathbf{R}_1 und \mathbf{L}_1 als \mathbf{J}_1 zu definieren und die Hierarchie würde ab $k \geq 2$ mit der hier Angegebenen zusammenfallen.

Auf dieser Erkenntnis aufbauend definieren wir zwei Familien von Kongruenzen $\triangleright'_{k,n}$ und $\triangleleft'_{k,n}$, die auf der Ebene $k = 1$ nur Bedingungen an das Alphabet stellen.

Definition 3.30. Sei Γ ein endliches Alphabet. Zunächst definieren wir $\triangleleft'_{k,n} = \triangleright'_{k,n} = \Gamma^* \times \Gamma^*$ für $n = 0$. Weiterhin definieren wir, dass $u \triangleright'_{1,n} v$ und $u \triangleleft'_{1,n} v$ genau dann gelten, wenn $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$.

Induktiv definieren wir für $u, v \in \Gamma^*$, $k \geq 2$ und $n \geq 1$, dass $u \triangleright'_{k,n} v$ genau dann gilt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$
2. $u \triangleleft'_{k-1,n-1} v$
3. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ erfüllen die a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Forderungen $u_- \triangleleft'_{k-1,n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright'_{k-1,n-1} v_+$

Links-rechts-symmetrisch hierzu definieren wir $u \triangleleft'_{k,n} v$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$
2. $u \triangleright'_{k-1,n-1} v$
3. Für alle $a \in \text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ erfüllen die a -rechts-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ und $v = v_- a v_+$ die Forderungen $u_- \triangleleft'_{k-1,n-1} v_-$ und $u_+ \triangleright'_{k-1,n-1} v_+$

3 Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k

Es lässt sich analog zu oben zeigen, dass $\triangleleft'_{k,n}$ und $\triangleright'_{k,n}$ Kongruenzen mit endlichem Index sind. Für $k = 1$ erzeugen diese Kongruenzen die Varietät \mathbf{J}_1 , da die Kongruenzklassen alle Wörter mit dem gleichen Alphabet identifizieren und ein Monoid in \mathbf{J}_1 eine Sprache genau dann erkennt, wenn sich die Sprache als endliche Vereinigung solcher Kongruenzklassen darstellen lässt. Des Weiteren lässt sich analog zu den Aussagen oben zeigen, dass diese Kongruenzen für $k \geq 2$ die selben Varietäten \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k erzeugen wie $\triangleright_{k,n}$ beziehungsweise $\triangleleft_{k,n}$.

Kapitel 4

Fragmente einer Intervalllogik

Dieses Kapitel führt die Syntax und Semantik der Logik UITL über endlichen Wörtern ein und zeigt, dass sich die Alternierungshierarchie des vorigen Kapitels auch durch Fragmente dieser Logik charakterisieren lassen.

4.1 Die Intervalllogik UITL

In diesem Abschnitt führen wir UITL ein, eine Temporallogik über Intervallen. Der Name leitet sich von *Unambiguous Intervall Temporal Logic* ab.

Die Definition der Syntax erfolgt induktiv wie folgt. Dabei sei Γ ein in diesem Abschnitt festes, endliches Alphabet.

Definition 4.1 (Syntax von UITL). Das Symbol \top ist die einzige atomare Formel in UITL. Sind ξ und ψ bereits Formeln in UITL, dann sind auch die booleschen Verknüpfungen

$$\neg\xi \quad \text{und} \quad \xi \vee \psi$$

Formeln in UITL. Für $a \in \Gamma$ definieren wir Operatorsymbole F_a und L_a und

$$\xi F_a \psi \quad \text{und} \quad \xi L_a \psi$$

sind Formeln in UITL. Wir nennen F_a den *First- a -Operator* und L_a den *Last- a -Operator*.

Um die Notation einfach zu halten wurden Klammern nicht in die Syntax von UITL aufgenommen. Wir vereinbaren aber die Konvention, dass Klammern gesetzt werden

können, falls Mehrdeutigkeiten auftreten können. Wir verwenden außerdem die gebräuchlichen Abkürzungen \perp für $\neg\top$, $\xi \wedge \psi$ für $\neg(\neg\xi \vee \neg\psi)$ sowie $\xi \rightarrow \psi$ für $\neg\xi \vee \psi$ und $\xi \leftrightarrow \psi$ für $(\xi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \xi)$.

Die Interpretation einer Formel erfolgt über einem Wort und einem Intervall von Positionen. Sei dazu $\text{pos}(u)$ die total geordnete Menge aller *Positionen* von u . Zum Beispiel ist die Menge $\{1, 2, \dots, |u|\}$ eine geeignete Wahl. Ein *Intervall* I über u ist eine Menge an Positionen von u , die zwischen einer unteren und einer oberen Grenze liegen, das heißt es gibt Positionen $i, j \in \text{pos}(u)$, sodass $I = \{k \in \text{pos}(u) \mid i \leq k \leq j\}$. Es ist leicht zu sehen, dass die Positionen i und j für ein nicht leeres Intervall eindeutig sind. Deshalb schreiben wir auch $[i, j]$ für das Intervall I . Insbesondere ist die Menge $\text{pos}(u)$ ein Intervall über u . Man beachte außerdem, dass $[i, j] = \emptyset$ für $i > j$. Für ein Intervall $[i, j]$ definieren wir außerdem die Verschiebung der unteren Grenze um eine Position nach oben durch $[i + 1, j] = \{k \in \text{pos}(u) \mid i < k \leq j\}$ und die Verschiebung der oberen Grenze um eine Position nach unten durch $[i, j - 1] = \{k \in \text{pos}(u) \mid i \leq k < j\}$. Hierbei gilt beispielsweise $[i + 1, j] = \emptyset$, falls $i \geq j$, insbesondere also falls i bereits die letzte Position im Wort ist. Es sei darauf hingewiesen, dass diese beiden Operationen auch für das leere Intervall wohldefiniert sind.

Wir sind nun in der Lage, die Semantik einer Formel in UITL über ein Wort u zusammen mit einem Intervall $[i, j]$ über u zu definieren. Wir schreiben $u, [i, j] \models \xi$ für ein Wort $u \in \Gamma^*$, ein Intervall $[i, j]$ über u und eine Formel $\xi \in \text{UITL}$, falls u die Formel ξ auf dem Intervall $[i, j]$ erfüllt und schließlich schreiben wir $u \models \xi$ für $u, \text{pos}(u) \models \xi$. Zwei Formeln ξ und ψ in UITL heißen *semantisch äquivalent*, wenn $u, I \models (\xi \leftrightarrow \psi)$ für alle Alphabete Γ , alle Wörter $u \in \Gamma^*$ und alle Intervalle I über u . In Zeichen schreiben wir $\xi \equiv \psi$.

Definition 4.2 (Semantik von UITL). Für alle Wörter $u \in \Gamma^*$ und alle Intervalle $[i, j]$ über u gilt

$$u, [i, j] \models \top$$

Seien $\xi, \psi \in \text{UITL}$ dann setzen wir

$$\begin{aligned} u, [i, j] \models \neg\xi & \quad \text{genau dann, wenn} \quad \text{nicht } u, [i, j] \models \xi \\ u, [i, j] \models \xi \vee \psi & \quad \text{genau dann, wenn} \quad u, [i, j] \models \xi \text{ oder } u, [i, j] \models \psi \end{aligned}$$

Desweiteren definieren wir für $a \in \Gamma$ induktiv

$$\begin{aligned} u, [i, j] \models \xi F_a \psi & \quad \text{genau dann, wenn} \quad \exists k \in [i, j]: u_k = a \wedge \forall m \in [i, k - 1]: u_m \neq a \wedge \\ & \quad u, [i, k - 1] \models \xi \wedge u, [k + 1, j] \models \psi \\ u, [i, j] \models \xi L_a \psi & \quad \text{genau dann, wenn} \quad \exists k \in [i, j]: u_k = a \wedge \forall m \in [k + 1, j]: u_m \neq a \wedge \\ & \quad u, [i, k - 1] \models \xi \wedge u, [k + 1, j] \models \psi \end{aligned}$$

Die Formel \top ist immer wahr. Die Interpretation der booleschen Kombinationen ist wie üblich. Die Formel $\xi F_a \psi$ gilt, wenn es eine a -Position im betrachteten Intervall gibt und das Teilintervall aller Positionen links der ersten a -Position die Formel ξ und das rechte Teilintervall ψ erfüllt. Eine entsprechende Interpretation gilt für L_a und die letzte a -Position im Intervall. Das **U** in UITL für Eindeutigkeit bezieht sich dabei darauf, dass die Position, an denen die Operatoren F_a und L_a das Wort „zerschneiden“, eindeutig bestimmt ist (Lodaya et al. 2008 [LPS08] nennen F_a und L_a „chop operators“).

Beispiel 4.3. Wir definieren für jeden Buchstaben $a \in \Gamma$ eine Formel, für die wir das selbe Symbol schreiben und interpretieren dieses als $a \equiv \top F_a \top \equiv \top L_a \top$, das heißt $u, I \models a$ ist genau dann wahr, wenn es in u eine a -Position im Intervall I gibt.

Außerdem identifizieren wir für jede Teilmenge A des Alphabets Γ mit einer Formel durch

$$u, I \models A \quad \text{genau dann, wenn} \quad u, I \models \bigwedge_{a \in \Gamma \setminus A} \neg a$$

oder in Worten, falls in u auf dem Intervall I nur Buchstaben in A vorkommen. Die leere Konjunktion ist dabei konventionsgemäß \top .

Die Formel Γ ist für alle Wörter $u \in \Gamma^*$ und alle Intervalle über u äquivalent zu \top . Da u ein Wort über Γ ist, hat jede Position im Intervall eine Beschriftung in Γ . Die Formel \emptyset ist genau dann erfüllt, wenn das Intervall leer ist. Man beachte jedoch $\emptyset \neq \neg \Gamma \equiv \perp$, da sowohl \emptyset , als auch Γ für das leere Intervall wahr sind, das heißt $u, \emptyset \models \emptyset$, aber $u, \emptyset \not\models \perp$.

Beispiel 4.4. Wir definieren eine weitere abkürzende Schreibweise $\oplus \xi$ nach [LPS08] durch die Formel $\xi = (\emptyset \wedge \xi) \vee \bigvee_{a \in \Gamma} (\emptyset F_a \xi)$. Die Intuition ist, dass der Operator \oplus die Interpretation der Unterformel ξ auf alle Positionen mit Ausnahme der Ersten einschränkt. Betrachten wir dazu zunächst das leere Intervall $I = \emptyset$, dann ist der hintere Teil der Formel nicht wahr und der vordere Teil ist genau dann wahr, wenn ξ über dem leeren Intervall erfüllt ist. Ist $I = [i, j]$ nicht leer, ist der vordere Teil nicht wahr und i erfüllt die Teilformel $\emptyset F_a \xi$ nach obigem Beispiel und der Definition von F_a genau dann, wenn $[i + 1, j]$ die Formel ξ erfüllt. Dabei sei die Position i ohne Einschränkung mit a beschriftet. Außerdem erfüllen alle Positionen $i < k \leq j$ die Formel $\emptyset F_a \xi$ nicht, da das Intervall $[i, k - 1]$ nicht leer ist und damit \emptyset nicht erfüllen.

Entsprechend definieren wir den Operator \ominus durch $\ominus \xi \equiv (\emptyset \wedge \xi) \vee \bigvee_{a \in \Gamma} (\xi L_a \emptyset)$. Dieser schränkt die Interpretation der Formel ξ auf alle Positionen bis auf die Letzte ein. Für ein festes Alphabet ist die Größe der erzeugten Formel dabei jeweils linear in der Größe von ξ . Wir geben hier jedoch keine formale Definition der Größe einer Formel an, zum Beispiel könnten wir jedoch die Anzahl der in der Formel vorkommenden Symbole verwenden.

Lodaya et al. 2008 [LPS08] schreiben $\llbracket A \rrbracket$ anstatt A und definieren zusätzlich halb-offene Varianten $\lceil A \rceil$ und $\llbracket A \rceil$, sowie die offene Variante $\lceil A \rceil$. Diese lassen sich semantisch äquivalent definieren durch

$$\lceil A \rceil = \oplus \llbracket A \rrbracket, \quad \llbracket A \rceil = \ominus \llbracket A \rrbracket \quad \text{und} \quad \lceil A \rceil = \ominus \lceil A \rceil.$$

Schließlich definieren wir drei Familien von Fragmenten von UITL, die wie wir im Folgenden sehen werden, eng mit den Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k verwandt sind.

Definition 4.5. Zunächst sind in $\text{UITL}_{k,n}^F$, $\text{UITL}_{k,n}^L$ und $\text{UITL}_{k,n}$ für $k = 0$ oder $n = 0$ alle Formeln in UITL, in denen für kein $a \in \Gamma$ der Operator F_a oder der Operator L_a vorkommt, das heißt $\text{UITL}_{k,n} = \{\top, \perp\}$.

Für $k, n \geq 1$ ist $\text{UITL}_{k,n}^F$ die Menge aller booleschen Kombinationen von Formeln ξ der Form

$$\begin{aligned} \xi &\in \text{UITL}_{k-1,n-1} \quad \text{und} \\ \xi &= \psi_1 F_a \psi_2 \quad \text{für } a \in \Gamma, \psi_1 \in \text{UITL}_{k-1,n-1}^L \text{ und } \psi_2 \in \text{UITL}_{k,n-1}^F. \end{aligned}$$

Analog dazu ist $\text{UITL}_{k,n}^L$ die Menge aller booleschen Kombinationen von Formeln ξ der Form

$$\begin{aligned} \xi &\in \text{UITL}_{k-1,n-1} \quad \text{und} \\ \xi &= \psi_1 L_a \psi_2 \quad \text{für } a \in \Gamma, \psi_1 \in \text{UITL}_{k,n-1}^L \text{ und } \psi_2 \in \text{UITL}_{k-1,n-1}^F. \end{aligned}$$

$\text{UITL}_{k,n}$ ist die Menge aller booleschen Kombinationen von Formeln aus $\text{UITL}_{k,n}^F \cup \text{UITL}_{k,n}^L$ und schließlich definieren wir

$$\text{UITL}_k^F = \bigcup_{n \geq 0} \text{UITL}_{k,n}^F \quad \text{UITL}_k^L = \bigcup_{n \geq 0} \text{UITL}_{k,n}^L \quad \text{UITL}_k = \bigcup_{n \geq 0} \text{UITL}_{k,n}.$$

Intuitiv entspricht n der maximalen Anzahl Tiefe von F_a und L_a Operatoren in jedem Pfad im Syntaxbaum einer Formel. Der Parameter k gibt dabei eine obere Grenze für die mögliche Anzahl an Wechslen zwischen den beiden Operatoren auf jedem Pfad.

Bemerkung 4.6. Obige Konstruktion zur Ersetzung des Operators $\oplus \xi$ funktioniert in UITL_k^L nicht: Es gilt im Allgemeinen nur $\oplus \xi \in \text{UITL}_{k+1}^F$, falls $\xi \in \text{UITL}_k$ ist.

Sei $k \geq 0$ und ψ eine Formel in UITL. Die *von ψ definierte Sprache* ist $L(\psi) = \{u \in \Gamma^* \mid u \models \psi\}$. Eine Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ heißt *UITL-definierbar*, falls es eine Formel $\psi \in \text{UITL}$ gibt, die diese Sprache definiert, das heißt $L = L(\psi)$ oder äquivalent dazu, wenn für alle $u \in \Gamma^*$

$$u \models \psi \quad \text{genau dann, wenn} \quad u \in L$$

gilt und wir schreiben dann auch symbolisch $L \in \text{UITL}$. Die eben eingeführten Begriffe übertragen wir außerdem auf die anderen oben definierten Fragmente von UITL.

4.2 Die Lage von UITL_k in der Alternierungshierarchie

In diesem Abschnitt werden wir folgendes Theorem beweisen, das die Lage der durch Formeln in UITL_k^F und UITL_k^L definierbaren Sprachen innerhalb der Hierarchie klärt:

Theorem 4.7. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$ und $k \geq 1$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $L \in \text{UITL}_k^F$
2. $M(L) \in \mathbf{R}_k$
3. *Es gibt einen Homomorphismus $\mu: \Gamma^* \rightarrow M$ mit $M \in \mathbf{R}_k$, der L erkennt.*

Symmetrisch dazu sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $L \in \text{UITL}_k^L$
2. $M(L) \in \mathbf{L}_k$
3. *Es gibt einen Homomorphismus $\mu: \Gamma^* \rightarrow M$ mit $M \in \mathbf{L}_k$, der L erkennt.*

Dabei ist $M(L) = \Gamma^* / \equiv_L$ das syntaktische Monoid von L , siehe Anhang 6 ab Seite 63. Für den Beweis auf Seite 60 benötigen wir zunächst einige Begriffe und Lemmata. Zuvor halten wir jedoch folgendes Korollar fest.

Korollar 4.8. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$ und $k \geq 1$.*

1. *L ist genau dann in UITL_k , wenn L von einem Monoid in $\mathbf{R}_k \vee \mathbf{L}_k$ erkannt wird.*
2. *L ist genau dann in UITL , wenn L von einem Monoid in \mathbf{DA} erkannt wird.*

Beweis. Zu Aussage 1: Wir bezeichnen mit $\mathcal{V}(\Gamma)$ die Menge aller Sprachen, die einem endlichen Alphabet Γ die Menge der für dieses Alphabet in UITL_k definierbaren Sprachen zuordnet und zeigen über eine Induktion über die Formellänge, dass die Klasse von Sprachen \mathcal{V} eine Sprachvarietät ist.

Zunächst ist $\mathcal{V}(\Gamma)$ für jedes endliche Alphabet Γ abgeschlossen unter booleschen Operationen: Sind ψ_1, ψ_2 und $\xi \in \text{UITL}_k$, dann gilt $L(\psi_1) \cup L(\psi_2) = L(\psi_1 \vee \psi_2)$ und $\Gamma^* \setminus L(\xi) = L(\neg\xi)$.

Für $\psi \in \text{UITL}_k^F \cup \text{UITL}_k^L$ ergibt sich der Abschluss unter inversen Homomorphismen und Quotienten aus der Tatsache, dass UITL_k^F und UITL_k^L Sprachvarietäten sind. Im Folgenden sei $\varphi: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ ein Monoidhomomorphismus. Ist $\psi = \neg\xi$ für $\xi \in \text{UITL}_k^L$, dann folgt induktiv $\varphi^{-1}(L(\xi)) \in \mathcal{V}(\Sigma)$ und $a^{-1}L(\xi)$.

Damit gilt $\varphi^{-1}(L(\psi)) = \varphi^{-1}(\Gamma^* \setminus L(\xi)) = \Sigma^* \setminus \varphi^{-1}(L(\xi)) \in \mathcal{V}(\Sigma)$ und weiterhin $a^{-1}L(\psi) = a^{-1}(\Gamma^* \setminus L(\xi)) = \Gamma^* \setminus a^{-1}L(\xi) \in \mathcal{V}(\Gamma)$.

Sei $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \text{UITL}_k$, dann gilt induktiv $\varphi^{-1}(L(\psi_1)), \varphi^{-1}(L(\psi_2)) \in \mathcal{V}(\Sigma)$ und $a^{-1}L(\psi_1), a^{-1}L(\psi_2) \in \mathcal{V}(\Gamma)$. Damit gilt $\varphi^{-1}(L(\psi_1 \vee \psi_2)) = \varphi^{-1}(L(\psi_1) \cup L(\psi_2)) = \varphi^{-1}(L(\psi_1)) \cup \varphi^{-1}(L(\psi_2)) \in \mathcal{V}(\Sigma)$ und $a^{-1}L(\psi_1 \vee \psi_2) = a^{-1}L(\psi_1) \cup a^{-1}L(\psi_2) \in \mathcal{V}(\Gamma)$.

Also ist \mathcal{V} eine Sprachvarietät. Außerdem ist \mathcal{V} die kleinste Sprachvarietät, die die von UITL_k^F und UITL_k^L erzeugten Sprachvarietäten enthalten, da UITL_k der boolesche Abschluss von $\text{UITL}_k^F \cup \text{UITL}_k^L$ ist, und damit ist \mathcal{V} die zu $\mathbf{R}_k \vee \mathbf{L}_k$ korrespondierende Sprachvarietät.

Aussage 2 folgt sofort aus Theorem 4.7 und $\text{UITL} = \bigcup_{k \geq 1} \text{UITL}_k^F = \bigcup_{k \geq 1} \text{UITL}_k^L$ sowie $\mathbf{DA} = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{R}_k = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{L}_k$. \square

Die folgenden technischen Lemmata werden uns später behilflich sein. Für UITL^L gelten duale Ergebnisse, die wir hier jedoch nicht angeben, da wir diese nicht explizit benutzen.

Lemma 4.9. *Seien $k, n \geq 0$ und $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \text{UITL}_{k,n}$, sowie $u, v \in \Gamma^*$, dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Aus $u \equiv_{L(\psi)} v$ folgt $u \equiv_{L(\neg\psi)} v$*
2. *Aus $u \equiv_{L(\psi_1)} v$ und $u \equiv_{L(\psi_2)} v$ folgt $u \equiv_{L(\psi_1 \vee \psi_2)} v$*

Beweis. Seien $p, q \in \Gamma^*$. Für Aussage 1 gilt nach der Voraussetzung $puq \models \psi \Leftrightarrow pvq \models \psi$, was gleichbedeutend ist mit $puq \not\models \psi \Leftrightarrow pvq \not\models \psi$.

Nehmen wir zum Beweis von Aussage 2 an, dass $puq \models \psi_1 \vee \psi_2$ gilt. Ohne Einschränkung gelte $puq \models \psi_1$. Dann folgt nach der Voraussetzung $pvq \models \psi_1$ und damit $pvq \models \psi_1 \vee \psi_2$. Symmetrisch dazu folgt die umgekehrte Implikation. \square

Lemma 4.10. *Seien $k \geq 0, m \geq n \geq 0$ und $\psi \in \text{UITL}_{k,n}$, dann gilt $u^m \equiv_{L(\psi)} u^n$.*

Beweis. Seien $p, q \in \Gamma^*$, wir weisen $pu^{n+1}q \models \psi \Leftrightarrow pu^nq \models \psi$ nach, die Aussage folgt dann mittels Induktion über $m - n$. Wir führen eine Induktion über $n + |\psi|$. Für $n = 0$ ist $\psi = \top$ und die Aussage trivialerweise erfüllt.

Sei im Folgenden $n \geq 1$, ohne Einschränkung $\psi \in \text{UITL}_{k,n}^F$ und ψ habe die Form $\psi_1 F_a \psi_2$. Nehmen wir zunächst $a \in \text{alph}(p)$ an und $p_- a p_+$ sei die a -links-Faktorisierung von p . Das Wort $pu^{n+1}q$ erfüllt $\psi_1 F_a \psi_2$, falls $p_- \models \psi_1$ und $p_+ u^{n+1}q \models \psi_2$, entsprechendes

gilt für pu^nq . Induktiv wissen wir $p'u^nq \models \psi_2 \Leftrightarrow p'u^{n-1}q \models \psi_2$ für alle $p' \in \Gamma^*$ und mit $p' = p_+u$ folgt

$$\begin{aligned} pu^{n+1}q \models \psi & \text{ genau dann, wenn } p_- \models \psi_1 \text{ und } p'u^nq \models \psi_2 \\ & \text{ genau dann, wenn } p_- \models \psi_1 \text{ und } p'u^{n-1}q \models \psi_2 \\ & \text{ genau dann, wenn } pu^nq \models \psi \end{aligned}$$

Für $a \in \text{alph}(u) \setminus \text{alph}(p)$ haben die a -links-Faktorisierung die Form $pu^{n+1}q = pu_-au_+u^nq$ und $pu^nq = pu_-au_+u^{n-1}q$ und mit $p' = u_+$ können wir wie oben folgern. Für $a \in \text{alph}(q) \setminus \text{alph}(pu)$ sind die a -links-Faktorisierung die Form $pu^{n+1}q = pu^{n+1}q_-aq_+$ und $pu^nq = pu^nq_-aq_+$. Induktiv ergibt sich $pu^nq' \models \psi_1 \Leftrightarrow pu^{n-1}q' \models \psi_1$ für $q' \in \Gamma^*$ und mit $q' = uq_-$ folgt durch einen analogen Schluss wie oben wiederum $pu^{n+1}q \models \psi \Leftrightarrow pu^nq \models \psi$. Für $a \notin \text{alph}(puq)$ gilt schließlich $pu^{n+1}q \not\models \psi$ und $pu^nq \not\models \psi$. Ist $\psi \in \text{UITL}_{k-1, n-1}^F$, dann gilt induktiv $p'u^nq \models \psi \Leftrightarrow p'u^{n-1}q \models \psi$ für $p' \in \Gamma^*$ und mit $p' = pu$ folgt die Behauptung.

Ist ψ boolesche Kombination von Formeln in $\text{UITL}_{k,n}$, dann folgt die Aussage mittels Induktion nach der Formellänge und Lemma 4.9. \square

Lemma 4.11. *Seien $m \geq n \geq 0$ und $\psi \in \text{UITL}_{1,n}$, dann gilt $(uv)^m \equiv_{L(\psi)} (vu)^m$.*

Beweis. Wir zeigen die allgemeinere Aussage, dass $p(uv)^mq \models \psi \Leftrightarrow p'(vu)^mq \models \psi$ für $p, p', q \in \Gamma^*$ falls $p = p'$ oder $\text{alph}(pp') \subseteq \text{alph}(uv)$ per Induktion über $m + |\psi|$. Für $m = 0$ ist $\psi = \top$ und die Aussage trivialerweise erfüllt. Sei $m \geq 1$ und $\psi = \top F_a \xi$ mit $\xi \in \text{UITL}_{1, n-1}$. Nehmen wir zunächst $p = p'$ an. Ist $a \in \text{alph}(p)$ und p_-ap_+ die a -links-Faktorisierung von p , dann erfüllt $p(uv)^mq$ die Formel ψ genau dann, wenn $p_+(uv)^mq$ die Formel ξ erfüllt. Induktiv gilt, dass $p_+(uv)^mq$ die Formel ξ genau dann erfüllt, wenn dies für $p_+(vu)^mq$ ebenso gilt und damit genau dann, wenn $p(vu)^mq$ die Formel ψ erfüllt. Sei entweder $p = p'$ und $a \in \text{alph}(uv) \setminus \text{alph}(p)$ oder $p \neq p'$ und $a \in \text{alph}(uv)$. Dann haben die a -links-Faktorisierungen die Form $r_-ar_+(uv)^{m-1}q$ und $r'_-ar'_+(vu)^{m-1}q$, wobei $\text{alph}(r_+) \subseteq \text{alph}(uv)$ und $\text{alph}(r'_+) \subseteq \text{alph}(vu)$. Im Fall $p \neq p'$ gilt dies wegen $\text{alph}(pp') \subseteq \text{alph}(uv)$. Induktiv gilt $r_+(uv)^{m-1}q \models \xi \Leftrightarrow r'_+(vu)^{m-1}q \models \xi$ woraus die Behauptung folgt. Für $a \in \text{alph}(q) \setminus \text{alph}(puv)$ oder $a \notin \text{alph}(puvq)$ ergibt sich die Behauptung sofort.

Ist ψ boolesche Kombination von Formeln in $\text{UITL}_{1,n}$, folgt die Behauptung erneut mittels Induktion nach der Formellänge und Lemma 4.9. \square

Proposition 4.12. *Sei $k \geq 2$, $n \geq 0$ und $L \in \text{UITL}_{k,n}^F$, dann gilt $M(L) \in \mathbf{R}_k$.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass $M(L)$ die Gleichung $\rho_k = \sigma_k$ erfüllt. Damit ist nach Theorem 3.12 (2) $M(L) \in \mathbf{R}_k$. Wir wollen daran erinnern, dass ρ_k und σ_k durch Gleichung (3.1) auf Seite 31 eingeführt wurden und dort ω -Potenzen auftreten. Die

4 Fragmente einer Intervalllogik

Gleichung $\rho_k = \sigma_k$ gilt in $M(L)$, wenn $\rho_k \equiv_L \sigma_k$ für alle Belegungen der Variablen x_1 bis x_k mit Werten in Γ^* und $\omega \geq n_0$ für ein $n_0 \geq 1$ gilt. Insbesondere ist für diesen Beweis ω also eine Zahl. Nach der Voraussetzung gibt es eine Formel $\psi \in \text{UITL}_{k,n}^F$, sodass $L(\psi) = L$.

Wir zeigen per Induktion über $n + |\psi|$, dass $\rho_k \equiv_L \sigma_k$ für alle Belegungen von x_1 bis x_k und $\omega \geq n$ gilt. Im Fall $k = 0$ oder $n = 0$, das heißt $\psi \in \{\top, \perp\} = \text{UITL}_{k,n}^F$, gilt $\rho_k \equiv_{L(\psi)} \sigma_k$. Im Folgenden seien $k, n > 0$ und eine Belegung von x_1 bis x_k gegeben, für die wir auch x_i schreiben, um die Notation einfach zu halten.

Sei zunächst $\psi = \psi_1 F_a \psi_2$, $\psi_1 \in \text{UITL}_{k-1,n-1}^L$ und $\psi_2 \in \text{UITL}_{k,n-1}^F$. Ist $a \notin \text{alph}(\rho_k)$, dann folgt $a \notin \text{alph}(\sigma_k)$, da ρ_k und σ_k aus den gleichen Variablen aufgebaut sind. Deshalb gilt $\rho_k \not\equiv \psi$ und $\sigma_k \not\equiv \psi$, woraus $\rho_k \equiv_{L(\psi)} \sigma_k$ folgt. Sei also $a \in \text{alph}(\rho_k)$, dann haben die a -links-Faktorisierung von ρ_k und σ_k die Form $\rho_k = \rho' a \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1}$ und $\sigma_k = \rho' a \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\sigma_{k-1}}$ für $\rho', \rho'' \in \Gamma^*$. Induktiv können wir $\overline{\rho_{k-1}} \equiv_{L(\psi_2)} \overline{\sigma_{k-1}}$ annehmen. Damit und mit Lemma 4.10 gelten die Kongruenzen

$$\begin{aligned} \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} &\equiv_{L(\psi_2)} \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\rho_{k-1}} && \text{nach Lemma 4.10} \\ &\equiv_{L(\psi_2)} \rho'' (x_k \overline{\rho_{k-1}})^{\omega-1} x_k \overline{\sigma_{k-1}} \end{aligned}$$

und damit gilt $\rho_k \models \psi_1 F_a \psi_2$ genau dann, wenn $\sigma_k \models \psi_1 F_a \psi_2$.

Ist $\psi \in \text{UITL}_{k-1,n-1}^L$, dann gilt induktiv $\overline{\rho_{k-1}} \equiv_L \overline{\sigma_{k-1}}$, das heißt $M(L) \in \mathbf{L}_{k-1}$ und nach Lemma 3.20 erfüllt $M(L)$ die Gleichung $\rho_k = \sigma_k$. Für $\psi \in \text{UITL}_{k-1,n-1}^F$ folgt ebenfalls induktiv $\rho_{k-1} \equiv_L \sigma_{k-1}$, das heißt $M(L) \in \mathbf{R}_{k-1}$ und nach Lemma 3.19 erfüllt $M(L)$ die Gleichung $\rho_k = \sigma_k$.

Ist ψ schließlich eine boolesche Kombination von Formeln in $\text{UITL}_{k,n}^F$, dann gilt die Aussage induktiv unter Verwendung von Lemma 4.9. \square

Für $u \in \Gamma^*$ bezeichnen wir mit $[u]_{\triangleright,k,n} = \{v \in \Gamma^* \mid u \triangleright_{k,n} v\}$ die Äquivalenzklasse von $\triangleright_{k,n}$, die u enthält und entsprechend mit $[u]_{\triangleleft,k,n}$ die Äquivalenzklasse von $\triangleleft_{k,n}$ die u enthält.

Lemma 4.13. *Sei $u \in \Gamma^*$, dann gibt es für alle $k, n \geq 0$ Formeln $\psi_{[u],\triangleright,k,n} \in \text{UITL}_{k,n}^F$ und $\psi_{[u],\triangleleft,k,n} \in \text{UITL}_{k,n}^L$, sodass $L(\psi_{[u],\triangleright,k,n}) = [u]_{\triangleright,k,n}$ und $L(\psi_{[u],\triangleleft,k,n}) = [u]_{\triangleleft,k,n}$.*

Beweis. Wir setzen $\psi_{[u],\triangleright,k,n} = \psi_{[u],\triangleleft,k,n} = \top$, falls $k = 0$ oder $n = 0$. Induktiv definieren wir

$$\begin{aligned} \psi_{[u],\triangleright,k,n} &= \psi_{[u],\triangleleft,k-1,n-1} \wedge (\text{alph}(u) \wedge \neg(\Gamma \setminus \text{alph}(u))) \wedge \\ &\quad \bigwedge_{\substack{u = u_- a u_+ \\ a \notin \text{alph}(u_-)}} \psi_{[u_-],\triangleleft,k-1,n-1} F_a \psi_{[u_+],\triangleright,k,n-1} \end{aligned}$$

Die Konjunktion in der zweiten Zeile steht dabei als Abkürzung für eine Konjunktion über alle $a \in \text{alph}(u)$ mit der zugehörigen a -links-Faktorisierung $u = u_- a u_+$ von u . Entsprechend ist

$$\psi_{[u], \triangleleft, k, n} = \psi_{[u], \triangleright, k-1, n-1} \wedge (\text{alph}(u) \wedge \neg(\Gamma \setminus \text{alph}(u))) \wedge \bigwedge_{\substack{u = u_- a u_+ \\ a \notin \text{alph}(u_+)}} \psi_{[u_-], \triangleleft, k, n-1} L_a \psi_{[u_+], \triangleright, k-1, n-1}$$

wobei hier die Konjunktion in der zweiten Zeile als Abkürzung für eine Konjunktion über alle $a \in \text{alph}(u)$ steht und $u = u_- a u_+$ die zugehörigen a -rechts-Faktorisierung von u ist. Beide Abkürzungen stehen dabei für endlich viele Konjunktionsglieder, da u nur endlich viele Buchstaben hat und es zu jedem Buchstaben $a \in \text{alph}(u)$ genau jeweils eine a -links- und eine a -rechts-Faktorisierung gibt.

Eine einfache Induktion über den Formelaufbau unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\text{UITL}_{k,n}^F$ und $\text{UITL}_{k,n}^L$ unter booleschen Operationen abgeschlossen sind, zeigt $\psi_{[u], \triangleright, k, n} \in \text{UITL}_{k,n}^F$ und $\psi_{[u], \triangleleft, k, n} \in \text{UITL}_{k,n}^L$. Zu beachten ist dabei, dass im ersteren Fall die Abkürzung $\text{alph}(u)$ in der Formel durch F_a -Operatoren und im zweiten Fall durch L_a -Operatoren zu ersetzen ist, um im Fall $k = 1$ nicht einen unerlaubten Operator zu benutzen.

Es verbleibt zu zeigen, dass $L(\psi_{[u], \triangleright, k, n}) = [u]_{\triangleright, k, n}$ und $L(\psi_{[u], \triangleleft, k, n}) = [u]_{\triangleleft, k, n}$ gelten. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage, die zweite Aussage folgt analog dazu. Zunächst gilt die Aussage für $k = 0$ oder $n = 0$, da alle Wörter die Formel \top erfüllen, aber $\triangleright_{k,n}$ in diesem Fall auch alle Wörter identifiziert. Wir nehmen also $k > 0$ und $n > 0$ an. Die Teilformel $\text{alph}(u) \wedge \neg(\Gamma \setminus \text{alph}(u))$ ist für ein Wort v genau dann erfüllt, wenn v das selbe Alphabet wie u hat, das heißt falls $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$. Induktiv können wir für jedes $a \in \text{alph}(u)$ und die zugehörige a -links-Faktorisierung $u = u_- a u_+$

$$\begin{aligned} L(\psi_{[u], \triangleleft, k-1, n-1}) &= [u]_{\triangleleft, k-1, n-1} \\ L(\psi_{[u_-], \triangleleft, k-1, n-1}) &= [u_-]_{\triangleleft, k-1, n-1} \\ L(\psi_{[u_+], \triangleright, k, n-1}) &= [u_+]_{\triangleright, k, n-1} \end{aligned}$$

schließen. Nach Definition der Semantik von F_a erfüllt ein Wort v ein Konjunktionsglied $\psi_{[u_-], \triangleleft, k-1, n-1} F_a \psi_{[u_+], \triangleright, k, n-1}$ genau dann, wenn für die a -links-Faktorisierung $v = v_- a v_+$ gilt $v_- \in [u_-]_{\triangleleft, k-1, n-1}$ und $v_+ \in [u_+]_{\triangleright, k, n-1}$ oder anders formuliert $v_- \triangleleft_{k-1, n-1} u_-$ und $v_+ \triangleright_{k, n-1} u_+$. Insgesamt gilt $v \models \psi_{[u], \triangleright, k, n}$ genau dann, wenn $v \triangleleft_{k-1, n-1} u$, $\text{alph}(v) = \text{alph}(u)$ und für alle $a \in \text{alph}(u)$ mit den zugehörigen a -links-Faktorisierungen $u = u_- a u_+$ sowie $v = v_- a v_+$ die Bedingungen $v_- \triangleleft_{k-1, n-1} u_-$ und $v_+ \triangleright_{k, n-1} u_+$ erfüllt sind, also genau dann, wenn $u \triangleright_{k, n} v$. \square

Beweis von Theorem 4.7

Für „1 \Rightarrow 2“ ist zunächst $L \in \text{UITL}_{k,n}^F$ für ein $n \geq 0$. Proposition 4.12 zeigt die Aussage für $k \geq 2$ und es verbleibt für $k = 1$ zu zeigen, dass $M(L)$ in \mathbf{J} enthalten ist. Zunächst ist $M(L)$ wegen Lemma 4.10 aperiodisch. Aus Lemma 4.11 folgt, dass die Gleichung $(xy)^\omega = (yx)^\omega$ in $M(L)$ gilt. Deshalb ist $M(L)$ nach Lemma 2.31 in \mathbf{J} . Die Implikation „2 \Rightarrow 3“ ist trivialerweise erfüllt: Die Projektion $\pi: \Gamma^* \rightarrow M(L)$ ist ein Homomorphismus, $M(L)$ erkennt L und ist nach Voraussetzung in \mathbf{R}_k .

Für die Richtung „3 \Rightarrow 1“ reicht es nach Theorem 3.12 (5) und Lemma 6.3 aus, die Aussage für Monoide der Form $M = \Gamma^* / \triangleright_{k,n}$ für ein $n \geq 0$ zu zeigen. Nach Lemma 4.13 kann jede Äquivalenzklasse $\triangleright_{k,n}$ durch eine Formel in $\text{UITL}_{k,n}^F$ beschrieben werden, das heißt die von dieser Formel definierte Sprache ist genau die zugehörige Äquivalenzklasse. Nach Lemma 6.2 ist L eine Vereinigung derartiger Äquivalenzklassen, also gilt

$$\begin{aligned} L &= \bigcup_{u \in L} [u]_{\triangleright_{k,n}} \\ &= \bigcup_{u_i \in U} [u_i]_{\triangleright_{k,n}} \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit über eine endliche Menge U an Vertretern der Äquivalenzklassen ausreichend ist, da $\triangleright_{k,n}$ endlichen Index hat. Mit diesen Betrachtungen hat in

$$\psi_L = \bigvee_{u_i \in U} \psi_{[u_i]_{\triangleright_{k,n}}}$$

die Disjunktion nur endlich viele Glieder und ψ_L ist in $\text{UITL}_{k,n}$ enthalten. Außerdem definiert ψ_L die Sprache L .

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene Charakterisierungen zweier eng miteinander verwandten Alternierungshierarchien \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k für $k \geq 2$ bewiesen. Zunächst wurden im ersten Kapitel die algebraischen Grundlagen gelegt. Im zweiten Kapitel wurden die beiden bekannten Beschreibungen der Alternierungshierarchien über Mal'cev-Produkte von Varietäten und Kongruenzen mit zwei neuen Beschreibungen durch die Gleichungen in den Punkten 2 und 3 in Theorem 3.12, als äquivalent nachgewiesen. Entsprechend sind die Lemmata 3.15 sowie 3.18 und Proposition 3.16 und die zugehörigen Beweise neu. Das Korollar 3.14, das eine nicht-triviale Gleichungsbeschreibung des Schnitts von \mathbf{R}_k und \mathbf{L}_k ab Ebene drei enthält, ist dem Autor bisher nicht bekannt gewesen. Das Korollar 3.27, beweist, dass die Hierarchien maximal in einem durch die Projektion auf die Band-Varietät induzierten Intervall sind. Dieses Korollar ergibt sich aus der Gleichungsbeschreibung Theorem 3.12 (3) und war seither gleichfalls nicht bekannt.

In Kapitel 4 wurde schließlich die Intervalllogik UITL und deren Fragmente UITL_k^F und UITL_k^L eingeführt. In Abschnitt 4.2 wurde eine Charakterisierung der Hierarchien mittels dieser Fragmente bewiesen. Es wurde gezeigt, dass ein Monoid genau dann zur Ebene \mathbf{R}_k der Alternierungshierarchie gehört, wenn die von diesem Monoid erkannte Sprache im Fragment UITL_k^F definierbar ist. Entsprechend folgt daraus, dass ein Monoid genau dann zu \mathbf{L}_k gehört, wenn die davon erkannte Sprache UITL_k^L -definierbar ist. Da aufgrund der Gleichungen entscheidbar ist, ob ein endliches Monoid zu \mathbf{R}_k oder zu \mathbf{L}_k gehört, folgt daraus die Entscheidbarkeit der Frage, ob eine Sprache UITL_k^F -beziehungsweise UITL_k^L -definierbar ist, indem das effektiv berechenbare syntaktische Monoid auf die Gültigkeit der Gleichung untersucht wird.

Ausblick

Aufgrund einer Gleichungsbeschreibung von $\mathbf{R}_2 \vee \mathbf{L}_2$ ist bekannt, dass $\mathbf{R}_2 \vee \mathbf{L}_2 \subsetneq \mathbf{R}_3 \cap \mathbf{L}_3$ gilt, das heißt zwischen Ebene zwei und drei der Join und der Schnitt nicht zusammenfallen [KIW08]. Dieses Resultat ist jedoch nicht direkt verallgemeinerbar, da für die höheren Ebenen keine Gleichungen für den Join bekannt sind. Deshalb stellt sich die Frage, ob der Join und der Schnitt ab Ebene drei zusammenfallen oder nicht. Interessant ist die Frage insbesondere auch deshalb, da Kufleitner und Weil [KIW08] das Logikfragment $\text{FO}_k^2[<]$ der Prädikatenlogik erster Stufe mit nur zwei verschiedenen Variablen und k Blöcken von Quantoren in die Hierarchie einordnen konnten. Sie konnten zeigen, dass die $\text{FO}_k^2[<]$ -definierbaren Sprachen im Bereich zwischen dem Join der Ebene k und dem Schnitt der Ebene $k + 1$ liegt. Um eine präzisere Aussage treffen zu können, wären gute Beschreibungen des Joins und des Schnitts, insbesondere Gleichungen, nützlich.

Des Weiteren haben Kufleitner und Weil [KIW08] weitere Charakterisierungen der Alternierungshierarchien gezeigt: Durch Fragmente einer sogenannten Temporallogik und durch eine sprachtheoretische Beschreibung mittels sogenannter deterministischer- und kodeterministischer Produkte auf Sprachvarietäten.

Algebraische Strukturen und formale Sprachen

6.1 Relationen und Funktionen

Seien M und N Mengen. Wir schreiben $|M|$ für die Kardinalität von M . Eine *binäre Relation* oder kurz *Relation* von M in N ist eine Teilmenge von $M \times N$. Wir schreiben auch $\mathcal{R}: M \rightarrow N$ oder $M \rightarrow^{\mathcal{R}} N$ für eine binäre Relation $\mathcal{R} \subseteq M \times N$ und $x \mathcal{R} y$ für $(x, y) \in \mathcal{R}$. Außerdem definieren wir $\mathcal{R}(x)$ als die Menge aller y , die zu x in der Relation \mathcal{R} stehen, das heißt $\mathcal{R}(x) = \{y \in N \mid x \mathcal{R} y\}$ und nennen $\mathcal{R}(x)$ das *Bild* von x unter der Relation \mathcal{R} und erweitern diese Notation auf Teilmengen $X \subseteq M$ durch $\mathcal{R}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}(x)$. Außerdem schreiben wir \mathcal{R}^{-1} für die *Umkehrrelation* und definieren diese durch $y \mathcal{R}^{-1} x$ genau dann, wenn $x \mathcal{R} y$. In Übereinstimmung mit obiger Notation ist $\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in M \mid x \mathcal{R} y\}$ und wir nennen $\mathcal{R}^{-1}(y)$ das *Urbild* von y unter der Relation \mathcal{R} . Das Bild von M unter \mathcal{R} heißt *Wertebereich* und das Urbild von N unter \mathcal{R} heißt *Definitionsbereich* von \mathcal{R} .

Ist \mathcal{R} eine Relation und gilt $|\mathcal{R}(x)| \leq 1$ für alle $x \in M$, dann nennen wir \mathcal{R} *funktional*. Weiterhin heißt \mathcal{R} *linkstotal*, falls $|\mathcal{R}(x)| \geq 1$ für alle $x \in M$, *surjektiv* oder *rechtstotal*, falls \mathcal{R}^{-1} linkstotal und *injektiv*, falls \mathcal{R}^{-1} funktional ist. Wir schreiben auch $\mathcal{R}: M \twoheadrightarrow N$ oder $M \twoheadrightarrow^{\mathcal{R}} N$, falls \mathcal{R} surjektiv, sowie $\mathcal{R}: M \rightarrow N$ oder $M \rightarrow^{\mathcal{R}} N$, falls \mathcal{R} injektiv ist. Ist \mathcal{R} injektiv und surjektiv, dann sagen wir \mathcal{R} ist *bijektiv*.

Eine funktionale Relation heißt *partielle Funktion*, eine linkstotale partielle Funktion heißt *Funktion* oder auch *totale Funktion*, wenn die Totalität betont werden soll. Speziell nennen wir eine Funktion $\mathcal{R}: N \times N \rightarrow N$ auch eine (*binäre*) *innere Verknüpfung*. Die Begriffe *Funktion* und *Abbildung* werden synonym verwendet.

Elementarer ausgedrückt, ist $\mathcal{R} \subseteq M \times N$ partielle Funktion, wenn es zu jedem x in M höchstens ein Element y im Bild von x gibt. Entsprechend ist \mathcal{R} linkstotal, wenn es zu jedem x in M mindestens ein Element y im Bild von x gibt, das heißt der Definitionsbereich von \mathcal{R} ist M . Damit gibt es für eine Funktion \mathcal{R} zu jedem x in M genau ein y mit $y \in \mathcal{R}(x)$ und wir schreiben $\mathcal{R}(x)$ für dieses eindeutig bestimmte y – im Gegensatz zur eigentlichen Definition als einelementige Menge, die y enthält. Ist die Relation \mathcal{R} injektiv, dann gibt es zu jedem y in N höchstens ein x mit $y \in \mathcal{R}(x)$, das heißt aus $y \in \mathcal{R}(x)$ und $y \in \mathcal{R}(z)$ folgt $x = z$. Ist \mathcal{R} surjektiv, dann gibt es zu jedem y in N ein x in M , sodass $y \in \mathcal{R}(x)$, oder anders ausgedrückt: Der Wertebereich von \mathcal{R} entspricht der Menge N .

Für zwei Relationen $\mathcal{R}: M \rightarrow N$ und $\mathcal{S}: N \rightarrow T$ definieren wir die *Komposition* oder *Verkettung* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}: M \rightarrow T$ durch $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})(x) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(x))$. Dies bedeutet $x (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) z$ gilt genau dann, wenn es ein $y \in N$ gibt, sodass $x \mathcal{R} y$ und $y \mathcal{S} z$. Insbesondere ist dies für Funktionen die übliche Definition. Die Notation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ rührt von der Postfixnotation von Funktionen her, ist aber speziell in Situationen wie $M \xrightarrow{\mathcal{R}} N \xrightarrow{\mathcal{S}} T$ unintuitiv und wir schreiben auch $\mathcal{R}\mathcal{S}$ für $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Äquivalenzen und Ordnungen

Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ über M heißt *reflexiv* falls $\forall x \in M: x \mathcal{R} x$. Sie ist *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in M: x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ zutrifft und *antisymmetrisch*, falls $\forall x, y \in M: x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$ gilt, sowie *transitiv*, wenn sie $\forall x, y, z \in M: x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ erfüllt. Ist stets $x \mathcal{R} y$ oder $y \mathcal{R} x$ für alle $x, y \in M$, heißt \mathcal{R} *total*.

Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ heißt *Quasiordnung*, falls sie reflexiv und transitiv ist. Eine *Halbordnung* ist eine antisymmetrische Quasiordnung und eine *Totalordnung* ist eine totale Halbordnung. Eine symmetrische Quasiordnung heißt *Äquivalenzrelation*. Ein triviales Beispiel ist die *identische Relation* $\text{id}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ auf der Menge M .

Ist \sim eine Äquivalenzrelation, dann bezeichnen wir mit $[\cdot]_{\sim}: M \rightarrow 2^M$ die Abbildung, die einem Element x seine Äquivalenzklasse $[x]_{\sim}$ zuordnet, das heißt $x \mapsto [x]_{\sim} = \{y \in M \mid x \sim y\}$. Die Menge aller Äquivalenzklassen bildet eine *Partition* von M , denn aufgrund der Reflexivität der Äquivalenzrelation gilt $x \in [x]_{\sim}$ und damit ist $[x]_{\sim}$ nicht leer. Sind außerdem $[x]_{\sim}$ und $[y]_{\sim}$ zwei Äquivalenzklassen, die beide ein Element z enthalten, dann gilt $x \sim z$ und $y \sim z$. Da \sim symmetrisch ist folgt $z \sim y$ und mit der Transitivität schließlich $x \sim y$. Ist $z \in [y]_{\sim}$, das heißt $y \sim z$ folgt $x \sim z$ und nach Definition der Äquivalenzklasse $z \in [x]_{\sim}$. Damit ist $[y]_{\sim} \subseteq [x]_{\sim}$ und da die umgekehrte Inklusion analog gilt, sind die Äquivalenzklassen zweier verschiedener

Elemente entweder disjunkt oder identisch. Wir schreiben M/\sim für diese Partition und nennen die Kardinalität von M/\sim den *Index* von \sim .

Ist \preceq eine Quasiordnung, dann ergibt sich eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq M \times M$, durch die Definition $x \sim y$ genau dann, wenn $x \preceq y$ und $y \preceq x$. Weiterhin induziert \preceq eine Halbordnung auf M/\sim .

6.2 Halbgruppen, Monoide und Gruppen

Eine *Halbgruppe* ist ein Paar (S, \cdot) , mit einer Menge S und einer assoziativen binären inneren Verknüpfung $\cdot: S \times S \rightarrow S$, das heißt für alle $x, y, z \in S$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Die Verknüpfung „ \cdot “ heißt *Multiplikation* und meist werden wir xy anstatt $x \cdot y$ schreiben, sofern keine Missverständnisse auftreten. Ist die Multiplikation *kommutativ*, das heißt für alle $x, y \in M$ gilt $xy = yx$, dann nennen wir auch die zugehörige Halbgruppe kommutativ.

Außerdem nennen wir auch nur die Menge S eine Halbgruppe, falls die zugrunde liegende Multiplikation aus dem Kontext klar ist. Wegen der Assoziativität schreiben wir auch xyz für das eindeutige Ergebnis der Verknüpfung von x, y und z unter Verwendung einer beliebigen Klammerung. Induktiv lässt sich dies auf beliebige endliche Produkte übertragen. Wie üblich definieren wir für $n \geq 1$ die n -te Potenz eines Elements x durch $x^1 = x$ und $x^n = xx^{n-1}$ für $n > 1$. Schließlich nennen wir eine Halbgruppe *endlich*, wenn die Menge S endlich ist.

Ein Element $e \in S$ heißt *idempotent*, falls $e^2 = e$ gilt. Ist S eine endliche Halbgruppe, dann hat jedes Element $x \in S$ eine idempotente Potenz, das heißt es gibt ein $n \geq 1$ mit $(x^n)^2 = x^n$: Betrachten wir dazu die Potenzen x, x^2, \dots . Wegen der Endlichkeit von S muss es zwei Potenzen $1 \leq i < j$ geben, sodass $x^i = x^j$ und wir zeigen, dass mit $p = j - i$ das Element x^{ip} idempotent ist. Zunächst ist $x^i = x^{i+p} = x^j$ und mit Hilfe der Faktorisierung $x^{i+p} = x^i x^p$ folgt induktiv $x^{i+kp} = x^j$ für alle $k \geq 1$. Damit gilt $(x^{ip})^2 = x^{ip+ip} = x^{i(p-1)} x^{i+ip} = x^{i(p-1)} x^i = x^{ip}$ für $p > 1$ und für $p = 1$ gilt schließlich $(x^{ip})^2 = x^{i+ip} = x^i = x^{ip}$.

Hat ein Element x eine idempotente Potenz, dann ist diese eindeutig: Sind x^i und x^j idempotent, dann gilt $x^i = (x^i)^j = x^{ij} = (x^j)^i = x^j$. Aus diesem Grund schreiben wir x^ω für die eindeutig bestimmte idempotente Potenz, falls diese existiert, was insbesondere für endliche Halbgruppen nach obiger Betrachtung immer der Fall ist. Dabei behandeln wir ω wie eine Zahl¹ und insbesondere schreiben wir $x^{\omega-1}$ für ein Element, für das $xx^{\omega-1} = x^\omega$ gilt. Man beachte, dass weder ω noch $x^{\omega-1}$ eindeutig bestimmt sind, was aber für uns an dieser Stelle keine Rolle spielt, da es nur wichtig

¹Zum Beispiel ist die Wahl $\omega = |S|!$ für endliche eine Halbgruppe S immer möglich.

ist, dass $x^{\omega-1}$ durch eine weitere Multiplikation mit x idempotent wird. Außerdem hängt ω von der Größe der Halbgruppe ab und falls es um mehrere (aber endlich viele) Halbgruppen geht, steht ω für eine Zahl, sodass für jedes Element einer dieser Halbgruppen die ω -Potenz in der entsprechenden Halbgruppe idempotent ist.

Ein Monoid (M, \cdot) ist eine Halbgruppe, in der ein *neutrales Element* $1 \in M$ existiert, das heißt $1x = x$ und $x1 = x$ für alle x in M . In einer Halbgruppe kann maximal ein neutrales Element existieren, ist nämlich $1'$ ein weiteres neutrales Element folgt $1' = 1'1 = 1$ aufgrund der Forderungen an ein neutrales Element. Für ein Monoid erweitern wir außerdem obige Schreibweise durch die Definition $x^0 = 1$. Besteht Verwechslungsgefahr zwischen den neutralen Elementen zweier Monoide, so schreiben wir 1_M für das neutrale Element von M .

Eine Gruppe (G, \cdot) ist ein Monoid, sodass für jedes Element x ein *inverses Element* oder kurz *Inverses* existiert, das wir mit x^{-1} bezeichnen, das heißt es gilt $x^{-1}x = 1$ und $xx^{-1} = 1$. Die Schreibweise ist auch hierbei wieder dadurch gerechtfertigt, dass es zu jedem Element in einem Monoid höchstens ein inverses Element gibt: Ist x' ein Inverses von x , dann gilt $x^{-1} = x^{-1}1 = x^{-1}xx' = 1x' = x'$. In einer Gruppe kann es außer dem neutralen Element kein anderes idempotentes Element geben. Ist $e^2 = e \in G$, dann gilt $1 = e^{-1}e = e^{-1}ee = 1e = e$. Des Weiteren genügt es bereits zu jedem Element $x \in G$ die Existenz eines *linksinversen* Elements x' zu fordern, das heißt für alle $x \in G$ gibt es ein x' mit $x'x = 1$, denn es gilt $xx' = (x')'x' \cdot xx' = (x')'x' = 1$ und damit ist x' auch *rechtsinvers*. Für Gruppen erweitern wir obige Potenzschreibweise auf negative ganze Zahlen: Ist $n \in \mathbf{Z}$ und $n < 0$, dann definieren wir $x^n = (x^{-n})^{-1}$. Man beachte, dass die üblichen Potenzgesetze gelten: $x^m x^n = x^{m+n}$, $(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$ für m, n in \mathbf{Z} gelten; für Halbgruppen müssen m, n entsprechend strikt positiv und für Monoide positiv sein. Im Allgemeinen gilt $(xy)^m = x^m y^m$ jedoch für $m \geq 1$ *nicht*, da die Multiplikation nicht notwendigerweise kommutativ ist.

6.3 Homomorphismen, Quotienten, Unterstrukturen und Kongruenzen

Allgemein wird eine „strukturverträgliche“ Abbildung Homomorphismus genannt. Für zwei Halbgruppen S und T ist ein *Halbgruppenhomomorphismus* eine Funktion $\varphi: S \rightarrow T$, sodass für $x, y \in S$ gilt $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Sind S und T Monoide, dann ist φ ein *Monoidhomomorphismus*, falls zusätzlich das neutrale Element von S auf das neutrale Element von T abgebildet wird, das heißt $\varphi(1_S) = 1_T$. Sind S und T Gruppen, muss ein *Gruppenhomomorphismus* der Bedingung $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ genügen. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen zwei Gruppen S und T ist jedoch bereits ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt $\varphi(1_S) = \varphi(1_S 1_S) = \varphi(1_S)\varphi(1_S)$, das heißt

$\varphi(1_S)$ ist idempotent und nach obiger Feststellung folgt $\varphi(1_S) = 1_T$. Des Weiteren gilt $\varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(1_S) = 1_T$ und analog folgt $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1_T$. Deshalb ist $\varphi(x^{-1})$ ein inverses Element von $\varphi(x)$ und damit $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Ein bijektiver Halbgruppen-, Monoid- oder Gruppenhomomorphismus φ heißt (Halbgruppen-, Monoid- oder Gruppen-) *Isomorphismus*, falls φ bijektiv ist.

Im Folgenden werden wir die Bezeichnung *Struktur* als Oberbegriff für Halbgruppen, Monoide und Gruppen verwenden und nur Homomorphismus schreiben, sofern ersichtlich ist, auf welche Struktur wir uns beziehen. Eine Struktur T heißt *Unterstruktur* von S , also *Unterhalbgruppe*, *Untermonoid* oder *Untergruppe*, je nach Struktur, falls es einen injektiven Homomorphismus von T nach S gibt. Diese Definition deckt sich bis auf Isomorphie mit der gebräuchlicheren Definition als abgeschlossene Teilmenge, die das neutrale Element enthalten muss, falls S ein Monoid ist

Sei T eine Teilmenge einer Halbgruppe S , dann bezeichnen wir die *von T erzeugte Unterhalbgruppe* von S mit T^+ . Ist T entsprechend eine Teilmenge eines Monoids, dann ist T^* das *von T erzeugte Untermonoid*. Speziell ist M_x für ein Monoid M und $x \in M$ das von den Faktoren von x erzeugte Untermonoid, das heißt $M_x = \{y \in M \mid x \in MyM\}^*$.

Eine Struktur T heißt *Quotient* von S , falls T das Bild von S unter einem surjektiven Homomorphismus ist. Die Struktur T ist ein *Divisor* von S , falls T der Quotient einer Unterstruktur von S ist. Ist S eine Halbgruppe, T eine Unterhalbgruppe und außerdem ein Monoid beziehungsweise eine Gruppe, dann nennen wir T auch Untermonoid beziehungsweise Untergruppe von S . Ist S ein Monoid, T ein Untermonoid und zusätzlich eine Gruppe, dann nennen wir T Untergruppe von S .

Ist \mathcal{R} eine Relation über S , dann heißt \mathcal{R} *verträglich* mit der Multiplikation, falls $u \mathcal{R} v, x \mathcal{R} y \Rightarrow ux \mathcal{R} vy$ für alle $u, v, x, y \in S$ gilt. Eine verträgliche Äquivalenzrelation heißt *Kongruenz*. Die folgende Eigenschaft ist insbesondere zum Nachweis der Verträglichkeit einer Äquivalenzrelation nützlich.

Lemma 6.1. *Sei \sim eine Äquivalenzrelation über eine Halbgruppe S . Dann ist \sim genau dann eine Kongruenz, wenn für alle $x, y, z \in S$ gilt $x \sim y \Rightarrow xz \sim yz$ und $zx \sim zy$.*

Beweis. „ \Rightarrow “ Da \sim reflexiv ist, gilt insbesondere $z \sim z$ und mit der Wahl $u = v = z$ folgt $xz = yz$. Die Aussage $zx \sim zy$ folgt analog.

„ \Leftarrow “ Seien $u \sim v$ und $x \sim y$. Wieder gilt $u \sim u$ und $y \sim y$ aufgrund der Reflexivität und mit der Voraussetzung erhalten wir $xu \sim yu$ und $yu \sim yv$. Mit der Transitivität von \sim folgt $xu \sim yv$. \square

Für eine Kongruenz \sim über einer Halbgruppe S können wir nun auf S/\sim eine kanonische Halbgruppenstruktur festlegen, wobei die Multiplikation für $[x]_\sim, [y]_\sim \in S/\sim$

gegeben ist durch $[x]_{\sim}[y]_{\sim} = [xy]_{\sim}$. Dabei sind $x, y \in S$ beliebige Vertreter der jeweiligen Äquivalenzklassen. Die Multiplikation ist wohldefiniert, denn sind $u, v \in S$ mit $[u]_{\sim} = [x]_{\sim}$ und $[v]_{\sim} = [y]_{\sim}$, dann gilt nach Definition der Äquivalenzklassen $u \sim x$ und $v \sim y$. Da außerdem \sim nach Voraussetzung eine Kongruenz ist, folgt $uv \sim xy$ und damit $[uv]_{\sim} = [xy]_{\sim}$ und das Ergebnis der Multiplikation hängt nicht von der Wahl der Vertreter ab. Außerdem gibt es natürlich für jede Äquivalenzklasse in M/\sim einen Vertreter in M (da eine Äquivalenzklasse insbesondere nicht leer ist). Damit ist die Abbildung $\varphi: M \rightarrow M/\sim, x \mapsto [x]_{\sim}$ ein surjektiver Homomorphismus von M in M/\sim , oder anders formuliert ist M/\sim ein Quotient von M . Andererseits ist durch jeden Homomorphismus $\varphi: S \rightarrow T$ zwischen zwei Halbgruppen eine Kongruenz $\sim_{\varphi} \subseteq T \times T$ gegeben durch $x \sim_{\varphi} y$ genau dann, wenn $\varphi(x) = \varphi(y)$.

6.4 Formale Sprachen

Wir nennen eine endliche Menge auch *endliches Alphabet* oder kurz *Alphabet*. Die Elemente eines Alphabets heißen *Buchstaben*. Sei Γ ein endliches Alphabet. Wir bezeichnen eine endliche Sequenz u von Buchstaben in Γ als *Wort* über Γ und schreiben $u = u_1u_2 \cdots u_n$, wenn das Wort aus der Sequenz von Buchstaben $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ besteht. Die *Konkatenation* zweier Worte $u = u_1u_2 \cdots u_n$ und $v = v_1v_2 \cdots v_m$ ist definiert durch $u \cdot v = uv = u_1u_2 \cdots u_nv_1v_2 \cdots v_m$. Die Menge aller endlichen, nicht leeren Worte über Γ bildet zusammen mit der Konkatenation die *freie Halbgruppe* über Γ und wir schreiben Γ^+ . Das *freie Monoid* Γ^* enthält darüber hinaus das leere Wort, das wir mit ε bezeichnen. Steht an der Position i von u ein Buchstabe $a \in \Gamma$, nennen wir i auch eine a -Position von u . Das *Alphabet eines Wortes* u , in Zeichen $\text{alph}(u)$, ist die Menge aller Buchstaben, die in u vorkommen. Dabei gilt $\text{alph}(uv) = \text{alph}(u) \cup \text{alph}(v)$. Für die *Spiegelung* von $u = u_1u_2 \cdots u_n$ schreiben wir $\bar{u} = u_nu_{n-1} \cdots u_1$. Dabei ist offensichtlich, dass $\text{alph}(\bar{u}) = \text{alph}(u)$ gilt. Eine Teilsequenz $u_{i_1}u_{i_2} \cdots u_{i_m}$ der Länge m von u mit $i_j > i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq m-1$ heißt *Teilwort* von u .

Eine *formale Sprache* über Γ oder kurz *Sprache* über Γ ist eine Menge von Worten, das heißt eine Teilmenge von Γ^+ oder Γ^* , je nach Fall. Ein Monoid M *erkennt* die Sprache $L \subseteq \Gamma^*$, falls es einen Homomorphismus $\mu: \Gamma^* \rightarrow M$ gibt, für den $\mu^{-1}(\mu(L)) = L$ gilt. Wir sagen dann auch der Homomorphismus μ *erkennt* L . Eine Sprache heißt *erkennbar*, wenn es ein endliches Monoid gibt, das diese Sprache erkennt. Die syntaktische Kongruenz \equiv_L einer Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ ist gegeben durch $x \equiv_L y$ genau dann, wenn für alle $u, v \in \Gamma^*$ die Forderung $uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L$ erfüllt ist. Die Kongruenzklassen von \equiv_L bilden das *syntaktische Monoid* von L , in Zeichen $M(L) = \Gamma^*/\equiv_L$. Ein klassisches Resultat von Kleene zeigt, dass eine Sprache genau dann erkennbar ist, wenn das syntaktische Monoid von L endlich ist, das heißt \equiv_L endlichen Index hat.

Es gelten weiterhin die folgenden beiden elementaren Lemmata, die wir ohne Beweis wiedergeben.

Lemma 6.2. *Sei Γ ein endliches Alphabet und $L \subseteq \Gamma^*$. Ein Monoidhomomorphismus $\mu: \Gamma^* \rightarrow M$ erkennt L genau dann, wenn L eine Vereinigung von Äquivalenzklassen der Form $\mu^{-1}(x)$ für $x \in M$ ist.*

Lemma 6.3. *Sei Γ ein endliches Alphabet, $L \subseteq \Gamma^*$ und $\mu: \Gamma^* \rightarrow M$ sei ein Monoidhomomorphismus, der die Sprache L erkennt. Ist M Quotient eines Monoids N , dann erkennt N die Sprache L .*

Literaturverzeichnis

- [AKMO08] AUSIELLO, Giorgio (Hrsg.) ; KARHUMÄKI, Juhani (Hrsg.) ; MAURI, Giancarlo (Hrsg.) ; ONG, C.-H. L. (Hrsg.): *Fifth IFIP International Conference On Theoretical Computer Science - TCS 2008, IFIP 20th World Computer Congress, TC 1, Foundations of Computer Science, September 7-10, 2008, Milano, Italy*. Bd. 273. Springer, 2008 (IFIP). – ISBN 978-0-387-09679-7
- [DGK108] DIEKERT, Volker ; GASTIN, Paul ; KUFLEITNER, Manfred: A Survey on Small Fragments of First-Order Logic over Finite Words. In: *International Journal of Foundations of Computer Science* 19 (June 2008), Nr. 3, S. 513–548. – Special issue DLT 2007
- [Eil76] EILENBERG, Samuel: *Automata, Languages, Machines*. Bd. B. Orlando, FL, USA : Academic Press, Inc., 1976. – ISBN 0122340027
- [ES76] EILENBERG, Samuel ; SCHÜTZENBÉRGER, Marcel P.: On pseudovarieties. In: *Advances in Mathematics* 19 (1976), Nr. 3, S. 413–418
- [How95] HOWIE, John M.: *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford : Oxford University Press, 1995. – ISBN 0-19-851194-9.
- [HW99] HALL, Tom E. ; WEIL, Pascal: On radical congruence systems. In: *Semigroup Forum* 59 (1999), S. 56–73
- [Kl06] KUFLEITNER, Manfred: *Logical Fragments for Mazurkiewicz Traces: Expressive Power and Algebraic Characterizations*, Institut für Formale Methoden der Informatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2006
- [KIW08] KUFLEITNER, Manfred ; WEIL, Pascal: *On Language and Logical Hierarchies within FO^2 on words*. Dezember 2008. – Manuskript
- [LPS08] LODAYA, Kamal ; PANDYA, Paritosh K. ; SHAH, Simoni S.: Marking the chops: an unambiguous temporal logic. In: [AKMO08], S. 461–476
- [Pin86] PIN, Jean-Éric ; MILLER, Raymond E. (Hrsg.): *Varieties Of Formal Languages*. Plenum Publishing Co., 1986. – ISBN 0306422948

- [TT02] TESSON, Pascal ; THÉRIEN, Denis: Diamonds are Forever: The variety \mathbf{DA} . In: *Semigroups, Algorithms, Automata and Languages, Coimbra (Portugal) 2001*, World Scientific, 2002, S. 475–500
- [TW97] TROTTER, Peter ; WEIL, Pascal: The lattice of pseudovarieties of idempotent semigroups and a non-regular analogue. In: *Algebra Universalis* 37 (1997), S. 491–526
- [Wis86] WISMATH, Shelly L.: The lattices of varieties and pseudovarieties of band monoids. In: *Semigroup Forum* 33 (1986), Nr. 1, S. 187–198

Index

- $\triangleleft_{k,n}$, 35
- $\triangleleft'_{k,n}$, 49
- $\triangleright_{k,n}$, 35
- $\triangleright'_{k,n}$, 49
- Ω , 15, 31
- Ω_k , 16
- $\leq_{\mathcal{H}}$, 10
- $\leq_{\mathcal{J}}$, 10
- $\leq_{\mathcal{L}}$, 10
- $\leq_{\mathcal{R}}$, 10
- $M(L)$, 68
- \equiv_L , 68
- $\llbracket \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \rrbracket$, 53
- $\llbracket \cdot \rrbracket_{\triangleright,k,n}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\triangleleft,k,n}$, 58
- \equiv_n^{DA} , 25, 46
- $\llbracket \cdot \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \cdot \rrbracket_{\mathbf{V}}$, 16
- \equiv , 52
- $\textcircled{\oplus}$, 18
- \models , 52
- ω , 16
- \oplus, \ominus , 53
- ρ_k , 31
- σ_k , 31
- $\sim_{\mathbf{K}}$, 33
 - Definition, 33
 - Hauptsatz über $\sim_{\mathbf{K}}$, 35
- \top , 51
- A**, 21
 - Gleichung, 22
- Abbildung, *siehe* Funktion
- Äquivalenzrelation, 64
- $\text{alph}(\cdot)$, 68
- Alphabet
 - Buchstabe, 68
 - Definition, 68
 - Ω , 15, 31
 - Ω_k , 16
 - Wort, 68
- B**, 21, 29, 47
- \mathbf{B}_k^1 , 29, 47
- \mathbf{B}_k^r , 29, 47
- D**, 21
- DA**, 21, 23, 45
 - Gleichung, 24
- DS**, 21
- Freies Monoid, 68
- Funktion, 63
 - partielle Funktion, 63
 - totale Funktion, 63
- G_k , 29
- Gleichung
 - Beschreibung einer Varietät, 15
 - formale Gleichung, 15
 - G_k , 29
 - Gültigkeit, 15
 - I_k , 29
 - Sequenz von Gleichungen, 16
 - ultimativ erfüllt, 16
 - ρ_k , 31
 - σ_k , 31
- Green'sche Relation, 9
 - Definition, 9, 11

- \mathcal{D} , 11
- \mathcal{G} , 10
- \mathcal{H} , $\leq_{\mathcal{H}}$, 10
- \mathcal{J} , $\leq_{\mathcal{J}}$, 9, 10
- \mathcal{L} , $\leq_{\mathcal{L}}$, 9, 10
- \mathcal{R} , $\leq_{\mathcal{R}}$, 9, 10
- Gruppe
 - inverses Element, 66
- \mathcal{H} , 10
- \mathcal{H} -trivial, 20, 22
- Halbgruppe, *siehe* Monoid
 - Definition, 65
- Halbordnung, 64
- Hierarchie, 45
 - \mathbf{L}_k , 45
 - \mathbf{R}_k , 45
 - \mathbf{B}_k^l , 29, 47
 - \mathbf{B}_k^r , 29, 47
- Homomorphismus, 66
 - erkennt Sprache, 68
- Idempotent, 65
- I_k , 29
- Inverses Element, 66
- Isomorphismus, 66
- \mathbf{J} , 20
 - Gleichung, 22
- \mathcal{J} , 9
- \mathcal{J} -trivial, 20
- \mathbf{K} , 21
- Kongruenz, 67
 - $\triangleleft_{k,n}$, 35
 - $\triangleleft'_{k,n}$, 49
 - $\triangleright_{k,n}$, 35
 - $\triangleright'_{k,n}$, 49
 - \equiv_n^{DA} , 25, 46
 - $\sim_{\mathbf{K}}$, 33
 - Definition, 67
 - Syntaktische Kongruenz, \equiv_L , 68
- \mathbf{L} , 20, 31
 - Gleichung, 21
- \mathcal{L} , 9
- \mathcal{L} -trivial, 20, 31
- \mathbf{L}_k , 31, 38, 55
 - Charakterisierung, 38, 55
 - Definition, 31
 - Gleichung, 31
- \mathbf{LZ} , 21
- Mal'cev-Produkt, 17
 - Definition, 18
- Monoid, 65
 - aperiodisch, 20, 22
 - Definition, 65
 - Divisor, 67
 - erkennt Sprache, 68
 - erzeugtes Untermonoid, 67
 - freies Monoid, 68
 - \mathcal{H} -trivial, 20, 22
 - Homomorphismus, 66
 - idempotent, 16, 20
 - Isomorphismus, 66
 - \mathcal{J} -trivial, 20
 - kommutativ, 16, 65
 - \mathcal{L} -trivial, 20
 - neutrales Element, 66
 - ω -Potenz, 16, 65
 - Quotient, 67
 - \mathcal{R} -trivial, 20
 - syntaktisches Monoid, 68
 - Untermonoid, 67
- Morphismus, 17, 18
 - Definition, 17
 - \mathbf{K} -Morphismus, 34
 - relationaler Morphismus, 17
 - \mathbf{W} -Morphismus, 18
- Neutrales Element, 66
- Ω , 15
- Ω_k , 16
- ω , 16, 65

- Partition, 64
 Index, 65
- Quasiordnung, 64
- R**, 20, 31
 Gleichung, 21
- \mathcal{R} , 9
- \mathcal{R} -trivial, 20, 31
- regulär, 14
 reguläre \mathcal{D} -Klasse, 14
- Relation, 63
 Äquivalenzrelation, 64
 antisymmetrisch, 64
 bijektiv, 63
 Bild, 63
 funktional, 63
 Halbordnung, 64
 injektiv, 63
 Komposition, 64
 Kongruenz, 67
 linkstotal, 63
 Quasiordnung, 64
 rechtstotal, 63
 reflexiv, 64
 surjektiv, 63
 symmetrisch, 64
 total, 64
 Totalordnung, 64
 transitiv, 64
 Umkehrrelation, 63
 Urbild, 63
 Verkettung, 64
 veträchlich, 67
- Relationaler Morphismus, *siehe* Morphismus
- ρ_k , 31
- R_k**, 31, 38, 55
 Charakterisierung, 38, 55
 Definition, 31
 Gleichung, 31
- RZ**, 21
- σ_k , 31
- J₁**, 21
- Sprache, 68
 erkennbar, 68
 formale Sprache, 68
 Klasse von Sprachen, 19
- Sprachvarietät
 Definition, 19
 \mathcal{V} , 19
- Sprachvarietäten, 19
 Quotient, 19
 Quotient von links, 19
 Quotient von rechts, 19
- Syntaktische Kongruenz, 68
- Syntaktisches Monoid, 68
- Totalordnung, 64
- UITL, 51
 $\llbracket \cdot \rrbracket$, $\llbracket \cdot \rrbracket$, $\llbracket \cdot \rrbracket$, $\llbracket \cdot \rrbracket$, 53
 \equiv , 52
 \models , 52
 \oplus , \ominus , 53
 Charakterisierung, 55
 F_a , 51
 First-Operator, 51
 Intervall, 52
 L_a , 51
 Last-Operator, 51
 Positionen, 52
 Semantik, 52
 semantische Äquivalenz, 52
 Syntax, 51
 \top , 51
 UITL _{k,n} , 54
 UITL _{k} , 54
 UITL _{k,n} ^L, 54
 UITL _{k} ^L, 54
 UITL _{k,n} ^F, 54
 UITL _{k} ^F, 54
- Umkehrrelation, 63
- Varietät, 14

- \mathbf{L}_k , 31, 38, 55
- \mathbf{R}_k , 31, 38, 55
- Definition, 15
- Halbgruppenvarietät, 15
- Intervall, 47
- Join, 17
- korrespondierende Sprachvarietät, 20
- Mal'cev-Produkt, 17, 18
- Monoidvarietät, 15
- Sprachvarietät, 19
- ultimativ definiert, 16
- $[\dots]$, $[\dots]_{\mathbf{V}}$, 16, 17
- \mathbf{A} , 21
- \mathbf{B} , 21, 29, 47
- \mathbf{B}_k^l , 29, 47
- \mathbf{B}_k^r , 29, 47
- \mathbf{D} , 21
- \mathbf{DA} , 21, 23, 45
- \mathbf{DS} , 21
- \mathbf{J} , 20
- \mathbf{K} , 21
- \mathbf{L} , 20
- \mathbf{LZ} , 21
- \mathbf{R} , 20
- \mathbf{RZ} , 21
- \mathbf{J}_1 , 21
- Verband
 - Untervarietäten von \mathbf{B} , 29
 - vollständiger Verband, 17
- Wort, 68
 - Alphabet, 68
 - Konkatenation, 68
 - Spiegelung, 68
 - Teilwort, 68

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Alexander Lauser)