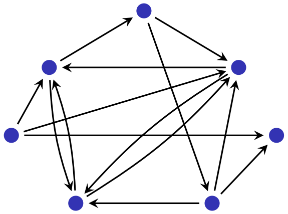
Formalsprachliche Theorie der Haarnadelstruktur

Formal Language Theory of Hairpin Formations

Steffen Kopecki

Abteilung Theoretische Informatik
Institut für Formale Methoden der Informatik
Universität Stuttgart

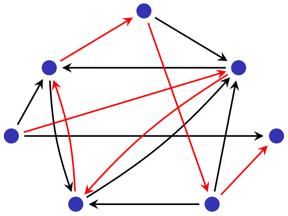
9. Juni 2011



Adleman (1994)

- Hamilton Pfad im Labor gelöst

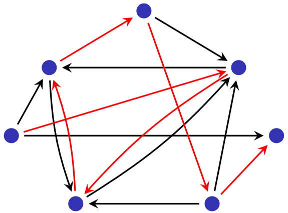
DNA-Computing



Adleman (1994)

- Hamilton Pfad im Labor gelöst

DNA-Computing

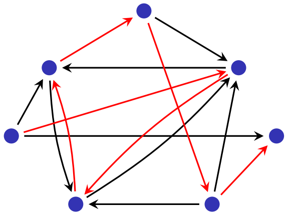


Adleman (1994)

- Hamilton Pfad im Labor gelöst

Adleman, Rothemund, Roweis, Winfree (1999)

- Theoretisches Modell um DES mithilfe von 1g DNA zu brechen
- Schlüsselmenge: 2^{56}



Adleman (1994)

- Hamilton Pfad im Labor gelöst

Adleman, Rothemund, Roweis, Winfree (1999)

- Theoretisches Modell um DES mithilfe von 1g DNA zu brechen
- Schlüsselmenge: 2^{56}

Braich, Chelyapov, Johnson, Rothemund, Adleman (2002)

- Lösung einer 3-SAT Instanz mit 20 Variablen

DNA Biochemie

DNA Strang

Sequenz von Nukleinbasen
Adenin, Cytosin, Guanin, Thymin

$$5'-\mathsf{C}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-3'$$

DNA Biochemie

DNA Strang

Sequenz von Nukleinbasen

Adenin, Cytosin, Guanin, Thymin

Watson-Crick-Komplement

$\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{T}$ und $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{G}$

$$
\begin{array}{c}
5'-C-G-G-T-A-T-C-A-T-C-C-C-A-3' \\
\;\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\mid\;\;\;\; \\
3'-G-C-C-A-T-A-G-T-A-G-G-G-T-5'
\end{array}
$$

DNA Strang

Sequenz von Nukleinbasen

Adenin, Cytosin, Guanin, Thymin

Watson-Crick-Komplement

$\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{T}$ und $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{G}$

$$
\begin{array}{c}
5'-\mathsf{C}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-3' \\
3'-\mathsf{G}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-5'
\end{array}
$$

Formale Sprachen

Alphabet Σ

Komplement $\overline{} : \Sigma \to \Sigma$

DNA Biochemie

DNA Strang

Sequenz von Nukleinbasen
Adenin, Cytosin, Guanin, Thymin

Watson-Crick-Komplement

$\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{T}$ und $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{G}$

$$
\begin{array}{c}
5'-\mathsf{C}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-3' \\
3'-\mathsf{G}-\mathsf{C}-\mathsf{C}-\mathsf{A}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-\mathsf{A}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{G}-\mathsf{T}-5'
\end{array}
$$

Formale Sprachen

Alphabet	Σ
Komplement	$\overline{} : \Sigma \to \Sigma$
für Wörter	$\overline{a_1 \cdots a_m} = \overline{a_m} \cdots \overline{a_1}$

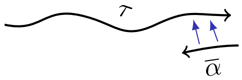
Polymerase-Kettenreaktion

engl. Polymerase Chain Reaction, PCR

Template $\quad \tau = \sigma\alpha$

Polymerase-Kettenreaktion

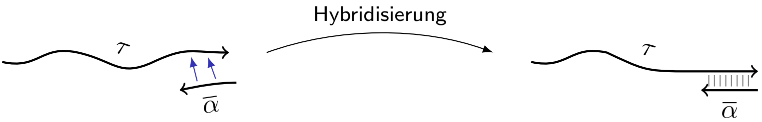
engl. Polymerase Chain Reaction, PCR



Template	$\tau = \sigma\alpha$
Primer	$\overline{\alpha}$

Polymerase-Kettenreaktion

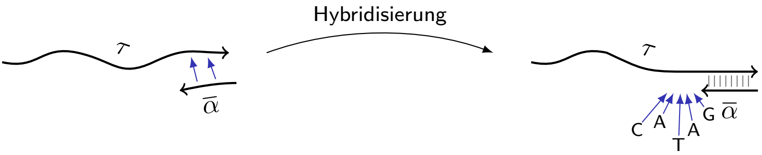
engl. Polymerase Chain Reaction, PCR



Template $\quad \tau = \sigma\alpha$
Primer $\quad \overline{\alpha}$

Polymerase-Kettenreaktion

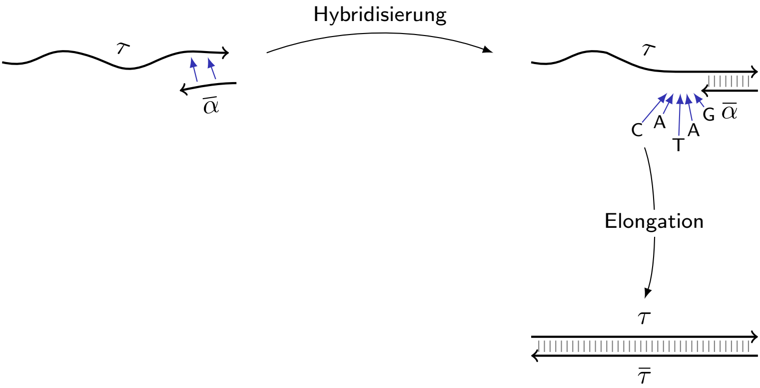
engl. Polymerase Chain Reaction, PCR



Template	$\tau = \sigma\alpha$
Primer	$\overline{\alpha}$

Polymerase-Kettenreaktion

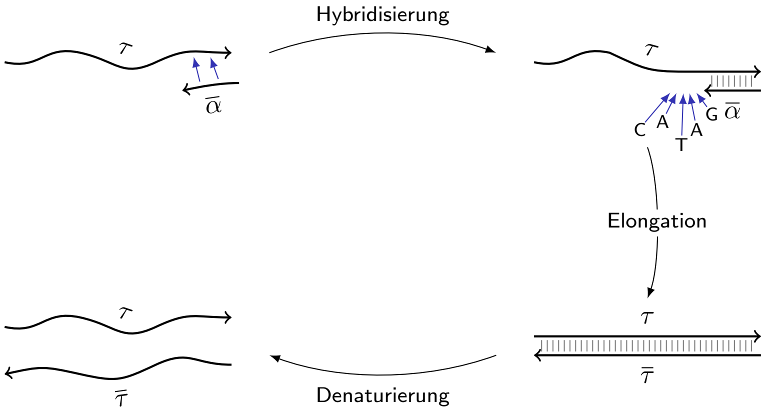
engl. Polymerase Chain Reaction, PCR



Template $\tau = \sigma\alpha$
Primer $\overline{\alpha}$

Polymerase-Kettenreaktion

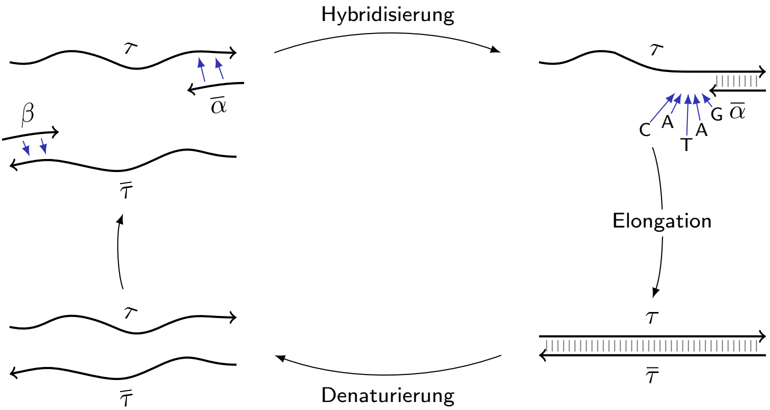
engl. Polymerase Chain Reaction, PCR



Template	$\tau = \sigma\alpha$
Primer	$\overline{\alpha}$

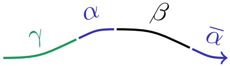
Polymerase-Kettenreaktion

engl. Polymerase Chain Reaction, PCR

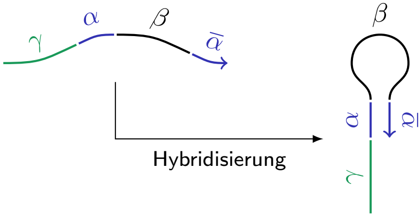


Template	$\tau = \sigma\alpha = \beta\sigma'$
Primer	$\overline{\alpha}$, β

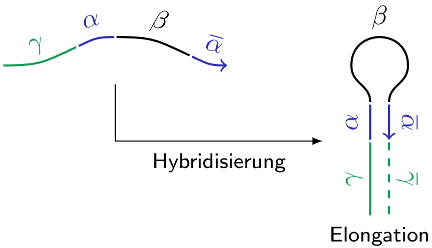
Haarnadel-Vervollständigung

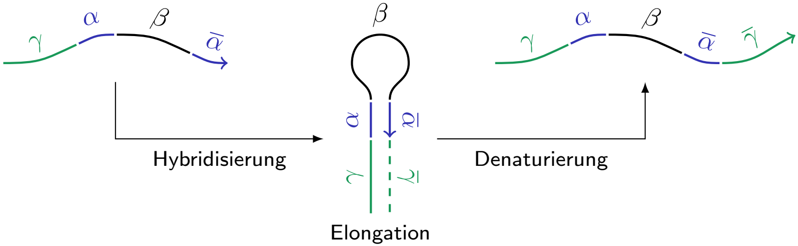


Haarnadel-Vervollständigung



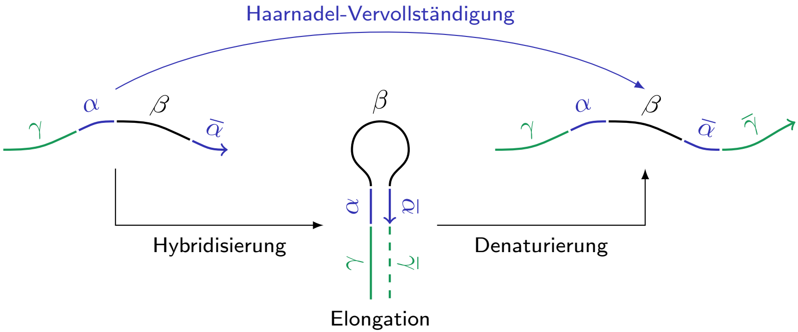
Haarnadel-Vervollständigung



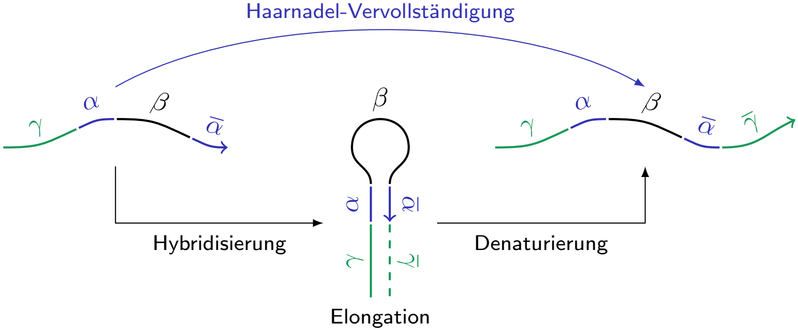


γ
α
β
$\bar{\alpha}$
Hybridisierung
β
α
$\bar{\alpha}$
γ
$\bar{\gamma}$
Elongation
Denaturierung
γ
α
β
$\bar{\alpha}$
$\bar{\gamma}$

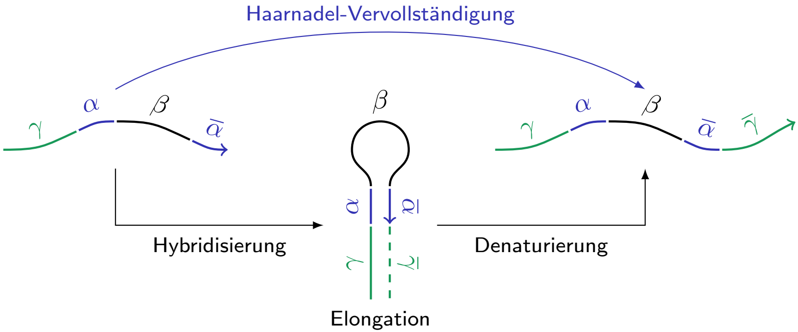
Haarnadel-Vervollständigung



Haarnadel-Vervollständigung



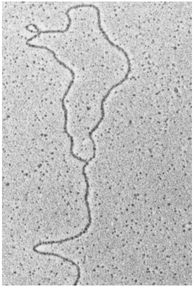
Primer-Länge k
Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$



Primer-Länge k
Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$

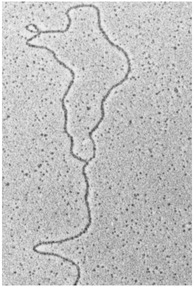
$$\mathcal{H}_k(L_1, L_2) = \{\gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \mid |\alpha| = k \wedge (\gamma\alpha\beta\overline{\alpha} \in L_1 \vee \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in L_2)\}$$

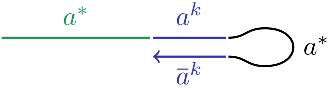
Beispiele



Beispiele

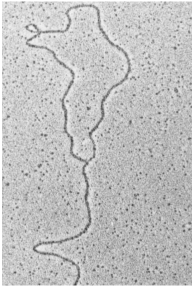
$L_1 = a^* \bar{a}^k$

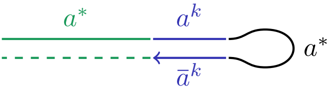




Beispiele

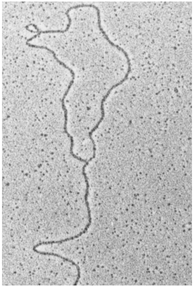
$$L_1 = a^*\overline{a}^k$$
$$\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i \overline{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq k \right\}$$

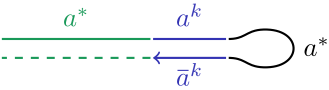


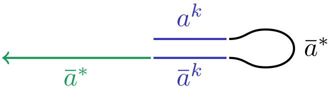


$L_1 = a^*\overline{a}^k$
$\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i \overline{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq k \right\}$

$L_2 = \overline{L_1} = a^k \overline{a}^*$



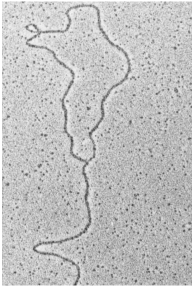


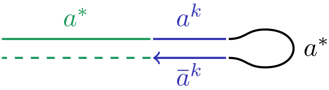


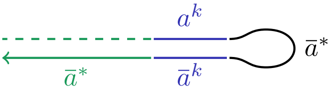
Beispiele

$$L_1 = a^* \overline{a}^k$$
$$\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i \overline{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq k \right\}$$

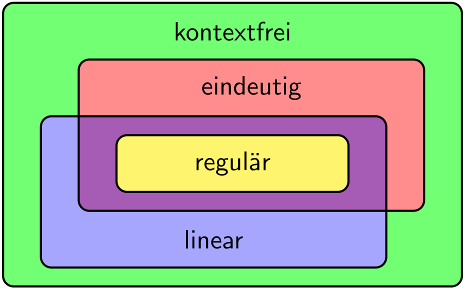
$$L_2 = \overline{L_1} = a^k \overline{a}^*$$
$$\mathcal{H}_k(L_1, L_2) = \left\{ a^i \overline{a}^j \;\middle|\; i, j \geq k \right\}$$





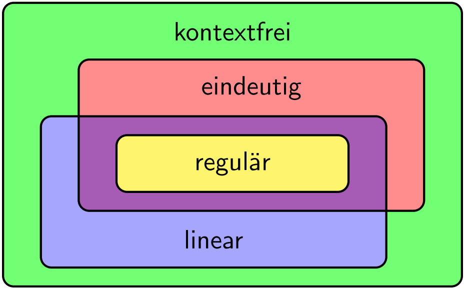


Sprach-Hierarchie



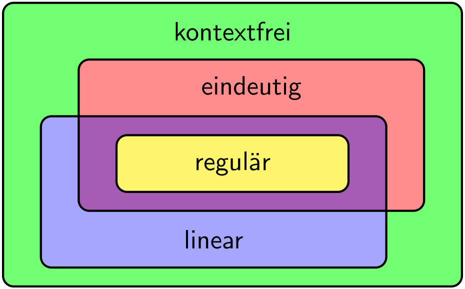
- L_1, L_2 regulär

Sprach-Hierarchie



- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ linear

Sprach-Hierarchie



- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ linear
- Unentscheidbar: Ist eine gegebene lineare Sprache regulär?

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.

Frage: Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Diekert, Kopecki, Mitrana (2009)

- P 1 ist entscheidbar in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(n^{14})$.

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Diekert, Kopecki, Mitrana (2009)

- P 1 ist entscheidbar in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(n^{14})$.

Theorem

P 1 ist NL*-vollständig.*

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe:	Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage:	Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Diekert, Kopecki, Mitrana (2009)

- P 1 ist entscheidbar in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(n^{14})$.

Theorem

P 1 ist NL-vollständig.

Theorem

P 1 ist entscheidbar in

i.) $\mathcal{O}(n^2)$ *falls* $L_2 = \emptyset$.

ii.) $\mathcal{O}(n^6)$ *falls* $L_1 = \overline{L_2}$.

iii.) $\mathcal{O}(n^8)$ *im Allgemeinen.*

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Diekert, Kopecki, Mitrana (2009)

- P 1 ist entscheidbar in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(n^{14})$.

Theorem

P 1 ist NL*-vollständig.*

Theorem

P 1 ist entscheidbar in

i.) $\mathcal{O}(n^2)$ *falls* $L_2 = \emptyset$.
ii.) $\mathcal{O}(n^6)$ *falls* $L_1 = \overline{L_2}$.
iii.) $\mathcal{O}(n^8)$ *im Allgemeinen.*

Theorem

$\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ *ist eindeutig linear.*

Haarnadel-Vervollständigung regulärer Sprachen

Problem 1

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Diekert, Kopecki, Mitrana (2009)

- P 1 ist entscheidbar in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(n^{14})$.

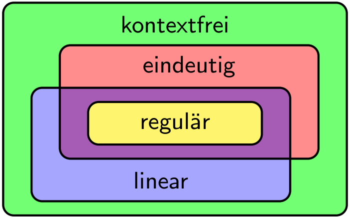
Theorem

P 1 ist NL*-vollständig.*

Theorem

P 1 ist entscheidbar in

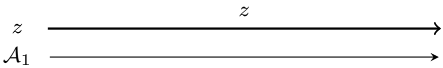
i.) $\mathcal{O}(n^2)$ *falls* $L_2 = \emptyset$.
ii.) $\mathcal{O}(n^6)$ *falls* $L_1 = \overline{L_2}$.
iii.) $\mathcal{O}(n^8)$ *im Allgemeinen.*



Theorem

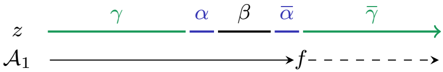
$\mathcal{H}_k(L_1, L_2)$ *ist eindeutig linear.*

Einseitiger Fall



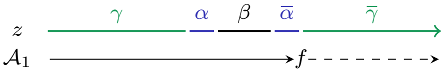
- Betrachte: $z \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$

Einseitiger Fall



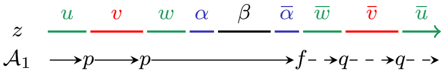
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand

Einseitiger Fall



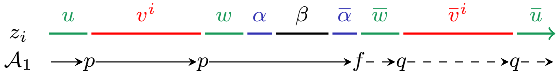
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2 \qquad (n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1)$

Einseitiger Fall

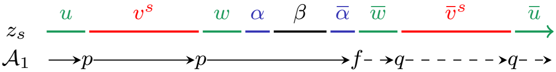


- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2$ $\qquad$ ($n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1$)

Einseitiger Fall

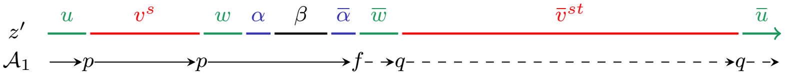


- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2 \qquad (n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1)$
- $\forall i\colon z_i = uv^iw\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$



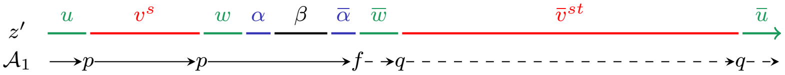
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2$ $\qquad$ ($n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1$)
- $\forall i\colon z_i = uv^iw\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Annahme: $\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ regulär $\Rightarrow \exists s\colon \overline{v}^s$ idempotent

Einseitiger Fall



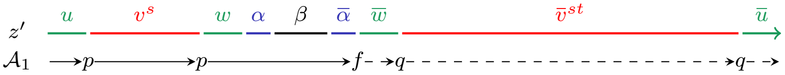
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2 \qquad (n = \text{Zustandszahl von } \mathcal{A}_1)$
- $\forall i\colon z_i = uv^iw\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Annahme: $\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ regulär $\Rightarrow \exists s\colon \overline{v}^s$ idempotent
- Wähle t groß: $z' = uv^sw\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^{st}\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$

Einseitiger Fall



- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2 \qquad (n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1)$
- $\forall i\colon z_i = uv^i w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Annahme: $\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ regulär $\Rightarrow \exists s\colon \overline{v}^s$ idempotent
- Wähle t groß: $z' = uv^s w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^{st}\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Widerspruch!

Einseitiger Fall



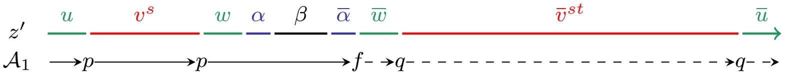
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2$ $\qquad$ ($n =$ Zustandszahl von $\mathcal{A}_1$)
- $\forall i \colon z_i = uv^i w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Annahme: $\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ regulär $\Rightarrow \exists s \colon \overline{v}^s$ idempotent
- Wähle t groß: $z' = uv^s w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^{st}\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Widerspruch!

Lemma

$\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ ist nicht regulär, wenn $\gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$, sodass

- *$\gamma\alpha\beta\overline{\alpha}$ längster Präfix in L_1 und*
- *$|\gamma| > n^2$.*

Einseitiger Fall

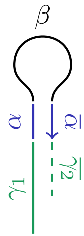


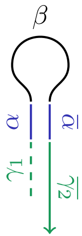
- Betrachte: $z = \gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- f ist Endzustand
- $|\gamma| > n^2$ $\quad$ (n = Zustandszahl von $\mathcal{A}_1$)
- $\forall i\colon z_i = uv^i w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^i\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Annahme: $\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ regulär $\Rightarrow \exists s\colon \overline{v}^s$ idempotent
- Wähle t groß: $z' = uv^s w\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{w}\overline{v}^{st}\overline{u} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$
- Widerspruch!

Lemma

$\mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$ ist nicht regulär genau dann, wenn $\gamma\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma} \in \mathcal{H}_k(L_1, \emptyset)$, sodass

- *$\gamma\alpha\beta\overline{\alpha}$ längster Präfix in L_1 und*
- *$|\gamma| > n^2$.*





$$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2) = \big\{\gamma_1\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma_2} \,\big|\, |\alpha| = k \wedge \big((\gamma_2 \leq_s \gamma_1 \wedge \gamma_1\alpha\beta\overline{\alpha} \in L_1) \vee \\ (\gamma_1 \leq_s \gamma_2 \wedge \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma_2} \in L_2)\big)\big\}.$$

Haarnadel-Verlängerung

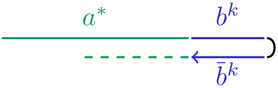
$$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2) = \big\{\gamma_1\alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma_2} \;\big|\; |\alpha| = k \wedge \big((\gamma_2 \leq_s \gamma_1 \wedge \gamma_1\alpha\beta\overline{\alpha} \in L_1) \vee (\gamma_1 \leq_s \gamma_2 \wedge \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\gamma_2} \in L_2)\big)\big\}.$$

$$\mathcal{H}_k(L_1, L_2) \subseteq \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$$

Beispiele

$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$

$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$
$\mathcal{HL}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq 0 \right\}$



Beispiele

$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$
$\mathcal{HL}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq 0 \right\}$ (linear)

Beispiele

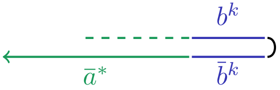
$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$

$\mathcal{HL}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \;\middle|\; i \geq j \geq 0 \right\}$ (linear)

$L_2 = \overline{L_1} = b^k \bar{b}^k \bar{a}^*$

$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$
$\mathcal{HL}_k(L_1, \emptyset) = \left\{ a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \mid i \geq j \geq 0 \right\}$ (linear)

$L_2 = \overline{L_1} = b^k \bar{b}^k \bar{a}^*$
$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2) = \left\{ a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \mid i, j \geq 0 \right\}$



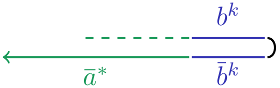
Beispiele

$L_1 = a^* b^k \bar{b}^k$

$\mathcal{HL}_k(L_1, \emptyset) = \{a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \mid i \geq j \geq 0\}$ (linear)

$L_2 = \overline{L_1} = b^k \bar{b}^k \bar{a}^*$

$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2) = \{a^i b^k \bar{b}^k \bar{a}^j \mid i, j \geq 0\}$ (regulär)



Haarnadel-Verlängerung regulärer Sprachen

- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ linear

Haarnadel-Verlängerung regulärer Sprachen

- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ linear

Problem 2

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.

Frage: Ist $\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Haarnadel-Verlängerung regulärer Sprachen

- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ linear

Problem 2

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Theorem

Für $L_2 = \emptyset$ ist P 2

i.) NL-*vollständig.*

ii.) *entscheidbar in $\mathcal{O}(n^2)$.*

Haarnadel-Verlängerung regulärer Sprachen

- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ linear

Problem 2

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ regulär?

Theorem

Für $L_2 = \emptyset$ ist P 2

i.) NL-*vollständig.*

ii.) *entscheidbar in $\mathcal{O}(n^2)$.*

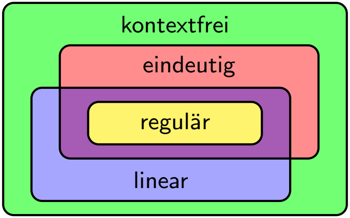
Theorem

$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ kann inhärent mehrdeutig sein.

- L_1, L_2 regulär $\Rightarrow \mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ linear

Problem 2

Eingabe: Reguläre Sprachen L_1 und L_2.
Frage: Ist $\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ regulär?



Theorem

Für $L_2 = \emptyset$ ist P 2

i.) NL-*vollständig.*

ii.) *entscheidbar in $\mathcal{O}(n^2)$.*

Theorem

$\mathcal{HL}_k(L_1, L_2)$ kann inhärent mehrdeutig sein.

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem

Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\alpha b \alpha c \alpha \overline{\alpha} \bar{d} \overline{\alpha}$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem

Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\underline{\alpha b}\alpha c\alpha\overline{\alpha}\overline{d}\overline{\alpha}\overline{b}\overline{\alpha}$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem

Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\underline{\alpha b}\alpha c \alpha \overline{\alpha} \bar{d} \overline{\alpha} (\bar{b} \overline{\alpha})^i$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem
Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\underline{\alpha b \alpha c}\alpha \bar{\alpha} \bar{d} \bar{\alpha} (\bar{b} \bar{\alpha})^i \bar{c} \bar{\alpha} \bar{b} \bar{\alpha}$$

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem
Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c \alpha \bar{\alpha} \underline{\bar{d} \bar{\alpha} (\bar{b} \bar{\alpha})^i \bar{c} \bar{\alpha} \bar{b} \bar{\alpha}}$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem
Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c \alpha \underline{\overline{\alpha} \bar{d} \overline{\alpha} (\bar{b} \overline{\alpha})^i \bar{c} \overline{\alpha} \bar{b} \overline{\alpha}}$$

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem

Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c \alpha \overline{\alpha} \bar{d} \overline{\alpha} (\bar{b} \overline{\alpha})^i \bar{c} \overline{\alpha} \bar{b} \overline{\alpha}$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L, L) \qquad\qquad \mathcal{H}_k^*(L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^i(L)$$

- Es existieren reguläre $L \subseteq \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(L)$ nicht kontextfrei ist.
- Kontextsensitive Sprachen sind unter iterierter Haarnadel-Vervollständigung abgeschlossen.
- Kann $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht regulär oder nicht kontextfrei sein?

Theorem

Es existieren $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ nicht kontextfrei ist.

$$\alpha b \alpha c (\alpha b)^i \alpha d \alpha b \alpha c (\alpha b)^j \alpha d \alpha b \alpha c \alpha \overline{\alpha} \bar{d} \overline{\alpha} (\bar{b} \overline{\alpha})^\ell \bar{c} \overline{\alpha} \bar{b} \overline{\alpha} \in \mathcal{H}_k^*(\{w\})$$
$$\iff i = j = \ell$$

Iterierte Haarnadel-Vervollständigung (2)

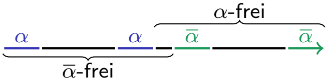
Aktuelle Forschung mit Kari und Seki

- Ist entscheidbar, ob $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ regulär ist?
- Existiert $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ kontextfrei aber nicht regulär ist?

Aktuelle Forschung mit Kari und Seki

- Ist entscheidbar, ob $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ regulär ist?
- Existiert $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ kontextfrei aber nicht regulär ist?

Gelöst für *kreuzungsfreie* Wörter, d. h.
Bsp.: $\alpha b \alpha c \alpha \overline{\alpha}\overline{d}\overline{\alpha}$

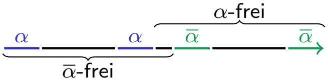


Iterierte Haarnadel-Vervollständigung (2)

Aktuelle Forschung mit Kari und Seki

- Ist entscheidbar, ob $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ regulär ist?
- Existiert $w \in \Sigma^*$, sodass $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ kontextfrei aber nicht regulär ist?

Gelöst für *kreuzungsfreie* Wörter, d. h.
Bsp.: $\alpha b \alpha c \alpha \bar{\alpha} \bar{d} \bar{\alpha}$



Theorem

Für kreuzungsfreies $w \in \Sigma^*$ ist

i.) *entscheidbar, ob $\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ regulär ist.*

ii.) *$\mathcal{H}_k^*(\{w\})$ entweder regulär oder nicht kontextfrei.*

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!