Das Übungsblatt ist komplett schriftlich zu bearbeiten. Abgabe bitte am 14. Februar in der Vorlesung bei Herrn Schmid.

Beachten Sie: Die Besprechung dieses Übungsblattes findet NUR am 14. und 15. Februar statt, Teilnehmer der Übungsgruppen der 2. Woche mögen sich bitte (gleichmässig) auf die Termine der 1. Woche verteilen.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Zeigen Sie: Die Klasse der kontextfreien Sprachen CF ist abgeschlossen gegen Durchschnitt mit regulären Mengen (d.h. $L \in \text{CF}$ und $L' \in \text{REG} \Rightarrow L \cap L' \in \text{CF}$). (Hinweis: siehe Beweis zum Abschluss regulärer Sprachen gegen Durchschnitt)

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie: Die Sprache $L_1 = \{ww | w \in \Sigma^*\}$ (also die Sprache, deren Wörter durch Konkatenation zweier gleicher Wörter gebildet wird) ist nicht kontextfrei.

Zeigen Sie, dass $L_2 = \overline{L_1}$ kontextfrei ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen deterministischen Kellerautomaten, der genau die Wörter mit gleich vielen „a“s wie „b“s akzeptiert.

Existiert auch eine eindeutige Grammatik für diese Sprache? Geben Sie eine eindeutige Grammatik an oder begründen Sie, warum es solche eine nicht geben kann.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Zeigen Sie: Das Leerheitsproblem ($L(G) = \emptyset$?) ist in der Komplexitätsklasse **P**, d.h., das Leerheitsprblem lässt sich in polynomieller Zeit bzgl. Länge der Eingabe (eine Kodierung der Grammatik) entscheiden.

Aufgabe 5: (2+5 Punkte)

3-SAT ist das Erfüllbarkeitsproblem, bei dem jede Klausel 3 Literale hat. Clique ist das Problem, zu einer Eingabe (G, k) zu entscheiden, ob der Graph G eine Clique mit mind. k Knoten besitzt ($V' \subseteq V$ heißt Clique, wenn die Knoten in V' paarweise durch Kanten verbunden sind). Independent-Set ist das Problem, zu einer Eingabe (G, k) zu entscheiden, ob der Graph G eine unabhängige Knotenmenge mit mind. k Knoten besitzt ($V' \subseteq V$ heißt unabhängig, wenn es keine Kantenverbindungen zwischen den Knoten in V' gibt).

Zeigen Sie durch (polynomielle) Reduktion des Problems Clique auf Independent-Set, dass Independent-Set NP-hart ist (mit Independent-Set $\in$ NP folgt die NP-vollständigkeit).

Zeigen Sie durch (polynomielle) Reduktion des Problems 3-SAT auf Independent-Set, dass Independent-Set NP-hart ist.