Aufgrund der geringen Teilnahme in den Übungsgruppen ist dieses Übungsblatt komplett schriftlich zu bearbeiten. Abgabe bitte am 20. Dezember in der Vorlesung bei Herrn Schmid.

Aufgabe 1: (1+2+2 Punkte)

Sei $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ die Menge der Primzahlen, $P' = \{(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), \dots\}$ die Menge der Primzahl-Zwillinge ($(p, p+2)$ ist Primzahl-Zwilling gdw. p und $p+2$ Primzahlen sind).

1. Zeigen Sie: $Q = \{(p,n) | p$ ist größer als die n-te Primzahl$\}$ ist aufzählbar.
2. Zeigen Sie: $Q' = \{(p,n) | p \geq q,\ (q, q+2)$ ist der n-te Primzahl-Zwilling$\}$ ist aufzählbar.
3. Sind Q und Q' auch entscheidbar? Ist das analoge Problem für Primzahl-Drillinge aufzählbar/entscheidbar?

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: Sind $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei aufzählbare Sprachen, so ist auch $L_1 \setminus L_2$ aufzählbar.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Zeigen Sie oder widerlegen Sie (mit Begründung!): Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Turingmaschinen, die nur den Platz der Eingabe auf dem Band verwenden (die Eingabe sei durch 2 gesonderte Trennzeichen begrenzt, die von der Turingmaschine nicht überschritten werden dürfen). Dann gilt: Das Halteproblem ist für Turingmaschinen aus $\mathcal{T}$ entscheidbar.

Aufgabe 4: (4*1.5 Punkte)

Zeigen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen (mit Begründung!):

1. Es ist entscheidbar, ob es für die von einer Turingmaschine berechnete Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ gibt mit $f(w) = w$.
2. Es ist entscheidbar, ob für eine Turingmaschine (oder ein Programm) für alle Eingaben die Ausgabe stets mit einer 1 beginnt.
3. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine für alle Eingaben nach genau 42 Schritten anhält.
4. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine für alle Eingaben nach genau 42 Schritten oder nie anhält.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Das Totalitätsproblem $T = \{< M > |$die Turing-Maschine M hält bei jeder Eingabe aus $\Sigma^*\}$ ist unentscheidbar. Zeigen Sie dieses durch Reduktion $H_\varepsilon \leq T$ (in dem Beweis zu H ist genau dann entscheidbar, wenn H_ε entscheidbar ist - Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 wurden schon ähnliche Reduktionstechniken angewendet).