Dieses Übungsblatt ist teilweise mündlich vorzubereiten. Vor Beginn der Übung wird im Übungsraum eine Liste ausliegen, auf der man ankreuzen kann, welche Aufgaben man zum Vorrechnen vorbereitet hat (ggf. statt einem Kreuz die entsprechenden Teilaufgaben angeben).

Die Aufgabe 4 ist schriftlich zu bearbeiten. Abgabe am 6. Dezember am Ende der Vorlesung

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Konstruieren Sie eine Busy-Beaver-Turingmaschine mit 5 Zuständen, die als Ergebnis mind. 15 Striche auf dem Band liefert.

Zum Testen ihrer BBTM können Sie auf die Simulation auf den WWW-Seiten der Abteilung Theoretische Informatik zurückgreifen.

`http://www.informatik.uni-stuttgart.de/ifi/ti/projects/beaver/bbb.html`

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Das Halteproblem für Turingmaschinen ist folgende Sprache

$$H = \{< M, w > | \mathrm{Res}_M(w) \text{ existiert}\}$$

und das spezielle Halteproblem ist die Sprache

$$H_\varepsilon = \{< M > | \mathrm{Res}_M(\varepsilon) \text{ existiert}\}$$

Zeigen Sie: H ist genau dann entscheidbar, wenn H_ε entscheidbar ist.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)

Das Postsche Korrespondenzproblem PCP:

1. Welche(s) der folgenden PCP's hat eine Lösung? Geben Sie eine Lösung an oder beweisen Sie, dass keine existiert.
   a) $Y_1 = \{(ba, bab), (abb, bb), (bab, abb)\}$
   b) $Y_2 = \{(a, aba), (ba, bb), (aab, aa)\}$
2. Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Komplement des Postschen Korrespondenzproblems $\overline{PCP}$ aufzählbar ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

In jeder natürlichen Sprache kann man innere Widersprüche (Antinomien) formulieren. Als einfachster Satz gilt die Formulierung „Dieser Satz ist falsch“. Denn dieser Satz macht eine Wahrheitsaussage über sich selbst, die nicht zutreffen kann: Wäre der Satz nämlich richtig, dann wäre er nach seiner eigenen Aussage falsch, und wäre er falsch, dann besagt er inhaltlich, daß er nicht falsch sein kann, also

richtig ist. Diese etwas gekünstelte Antinomie läßt sich aber auf konkretere Fälle übertragen. Bekannt ist die Barbier-Antinomie. Der Barbier in einem Dorf sei folgendermaßen definiert:
Definition: Der Barbier ist der Mann im Dorf, der alle die Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Diese Definition ist nicht korrekt, d. h. sie enthält einen Widerspruch. Dieser entsteht durch Selbstanwendung: Rasiert der Barbier sich selbst? Falls ja, dann darf er nicht vom Barbier, also von sich selbst rasiert werden, und falls nein, dann gehört er zu den Personen, die vom Babier, also von ihm selbst, rasiert werden. Nach obiger Definition rasiert der Barbier sich also genau dann selbst, wenn er sich nicht selbst rasiert. Dieser Widerspruch läßt sich auflösen, wenn man die Selbstanwendung der definierten Objekte verhindert:
Definition: Der Barbier ist der Mann, der alle die Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Bei dieser Definition wird der Barbier aus dem Dorf herausgenommen. Wenn er im Dorf lebt, bleibt der Widerspruch; wenn er aber nicht im Dorf lebt, sondern von außen zum Zwecke des Rasierens anreist, ist die Definition „wohldefiniert".

Nun zur Aufgabe: Wir betrachten alle mathematischen Funktionen über den natürlichen Zahlen, die genau einen Parameter besitzen und einen Wert liefern, also die Abbildungen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Diese Menge ist für unsere Zwecke aber noch viel zu groß. Wir betrachten daher nur die Funktionen, deren Berechnungen man in einer gegebenen natürlichen (oder formalen) Sprache beschreiben kann. Es ist klar, daß man diese Teilmenge der Funktionen herausgreifen kann, denn einstellige zahlentheoretische Funktionen werden stets durch eine Berechnungsvorschrift definiert (z. B. ganzzahlige Wurzel, n-te Primzahl, Fakultät usw.).
So erhalten wir eine sogenannte „aufzählbare" Menge von Funktionen: Wir schreiben nacheinander alle möglichen Textfolgen der deutschen (oder einer formalen) Sprache auf und sondern genau die Texte heraus, die die Berechnung einer einstelligen zahlentheoretischen Funktion darstellen. Man mache sich klar, daß dies zwar ein außerordentlich mühseliges und Jahrmillionen dauerndes Unterfangen ist, aber aus prinzipieller Sicht tatsächlich ausführbar ist. Wir erhalten dann eine unendliche Folge von Texten $T_1, T_2, T_3, \ldots$, wobei T_1 der kürzeste Text in deutscher Sprache ist, der eine einstellige zahlentheoretische Funktion berechnet, T_2 der nächst kürzeste Text usw. Zu T_1 gehört eine Funktion $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, zu T_2 eine Funktion $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ usw. Dann definieren wir folgende Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$g(n) = f_n(n) + 1, \text{ für alle natürlichen Zahlen } n.$$

Zweifellos kann man einen Text T angeben, der die Berechnung der Funktion g beschreibt: Man formuliert zunächst aus, wie die Texte $T_1, T_2, T_3, \ldots$ erzeugt wurden, dann ermittelt man zu vorgegebenem n den Text T_n, und anschließend wertet man den Text T_n für die Zahl n aus und addiert die Zahl 1 zum Ergebnis. Offenbar gibt es also einen Text T zur Berechnung von g. Dieser Text muß in der Folge der Texte $T_1, T_2, T_3, \ldots$ auftreten, sagen wir $T = T_k$ für eine geeignete Zahl k. Dann gilt aber:

$$f_k(k) = g(k) = f_k(k) + 1.$$

Wir erhalten einen Widerspruch, obwohl die obige Argumentation logisch korrekt zu sein scheint. Wo liegt der Fehler? (Untersuchen Sie den Beweis Schritt für Schritt und überlegen Sie, wie Sie die einzelnen Schitte in einen Algorithmus umsetzen könnten)