Übungen zur Vorlesung „Entwurf und Analyse eff. Algorithmen“

---

1. Weitere Anwendungen der Tiefensuche (depth-first-search) auf gerichteten Graphen:

```
forall v in V do
  dfsnr[v]:=0; visited[v]:=false; finished[v]:=0
od;
count:=1; fin:=1; T:={}; F:={}; C:={}; B:={};
forall u in V do
  if not visited[u] then dfs(u)
od;

procedure dfs(x)
  visited[x]:=true; dfsnr[x]:=count; count:=count+1;
  forall y in N(x) do
    if not visited[y] then T:=T+{(x,y)}; dfs(y)
    elsif dfsnr[x]<dfsnr[y] then F:=F+{(x,y)}
    elsif finished[y]>0 then C:=C+{(x,y)}
    else B:=B+{(x,y)}
  od;
  finished[x]:=fin; fin:=fin+1
end;
```

a) Betrachten Sie an einigen Beispielgraphen G folgenden Algorithmus: Führe eine Tiefensuche in G durch. Führe eine zweite Tiefensuche in dem Graphen $G^{-1} = (V, E^{-1})$ (in beiden forall-Schleifen in absteigender Reihenfolge der finished-Nummerierung, also beginnend mit dem Knoten v, für den finished[v]=$|V|$ gilt) durch ($E^{-1} := \{(x,y)|(y,x) \in E\}$).

Untersuchen Sie die in der zweiten Tiefensuche entstandene Menge T bzgl. dem Ursprungsgraphen G. Was berechnet der Algorithmus?

Geben Sie wenigstens zwei Beispiele mit je 10 Knoten an.

b) Beweisen Sie ihre Vermutung aus Teil a)

2. Anwendung des dfs-Algorithmus auf ungerichteten Graphen:

Ein Knoten v eines Graphen G heißt Artikulationspunkt, wenn $G - v$ mehr Zusammenhangskomponenten als G besitzt. Seien $e, e' \in E$, so sei $e \equiv e'$ genau dann, wenn e und e' auf einem einfachen (also doppelpunktfreien) Kreis liegen. Die Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation, die

Äquivalenzklassen sind die 2fach-Zusammenhangskomponenten des Graphen (aus einer 2fach-Zusammenhangskomponente kann stets 1 Knoten entfernt werden, ohne dass diese Zusammenhangskomponente zerfällt - beachten Sie: es gilt $e \equiv e$ für alle $e \in E$ (ist $uv \in E$, so sei hier (u, v, u) ein doppelpunktfreier Kreis), d.h., Brücken bilden in Graphen je eine eigene 2fach-Zusammenhangskomponente, eine Kante b ist Brücke, wenn $G' = (V, E \setminus \{b\})$ mehr Zusammenhangskomponenten als G besitzt).

a) Zeigen Sie zunächst: Führt man die Tiefensuche auf ungerichteten Graphen durch, so gilt stets $F := \emptyset$ und $C := \emptyset$.

b) Zeigen Sie: Ein Knoten v ist Artikulationspunkt genau dann, wenn er in mindestens zwei 2fach-Zusammenhangskomponenten des Graphen liegt.

c) Sind (u, v) und (v, w) zwei adjazente Baumkanten im dfs-Baum von G, dann gilt $(u, v) \equiv (v, w)$ genau dann, wenn eine Rückwärtskante $(w', u') \in B$ existiert, die von einem Nachkommen w' von w zu einem Vorfahren u' von u führt. Versuchen Sie, den dfs-Algorithmus so zu erweitern, dass eine einfache Berechnung der 2fach-Zusammenhangskomponenten möglich wird (berechnen Sie dazu on-the-fly die im dfs-Baum möglichst weit oben liegenden Knoten, die durch eine Rückwärtskante erreicht werden können).

3. Sei $T = (V, E, v, \gamma)$, $\gamma : V \to \Sigma^*$ ein knotenmarkierter Baum mit Wurzel $v \in V$. Beschreiben Sie zu ihren Algorithmen stets zunächst die Idee, erläutern Sie den Algorithmus und skizzieren Sie die Korrektheit und Komplexität (im Sinne der O-Notation).

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der zu zwei geordneten Bäumen T und T' feststellt, ob diese isomorph sind. Geordnet heißt, dass der linke und rechte Sohn unterscheidbar sind (und im isomorphen Graphen auch entsprechend linke bzw. rechte Söhne sein müssen).

b) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der zu zwei ungeordneten Bäumen T und T' feststellt, ob diese isomorph sind. Der linke Unterbaum kann in diesem Fall im isomorphen Baum der rechte Unterbaum sein und umgekehrt.

c) Wie verändert sich das Problem, wenn die Wurzel des Baumes nicht ausgezeichnet ist?

4. Zusatzaufgabe: Im Algorithmus zur Berechnung des Medians mit linear vielen Vergleichen wurden Mediane in 5er-Blöcken mit je 7 Vergleichen berechnet. Zeigen Sie, dass zur Berechnung des Medians aus 5 Elementen 6 Vergleiche ausreichen.

Abgabe: Montag, 17. Juli, nach der Vorlesung (Box im Foyer 1. Stock)