Übungen zur Vorlesung „Entwurf und Analyse eff. Algorithmen“

Hinweis: Geben Sie stets zunächst die **Idee** des Algorithmus an, **erläutern** Sie dann den Algorithmus, geben Sie eine Skizze zur **Korrektheit** und für die **Komplexität** des Algorithmus im Sinne der O-Notation an.

1. Tiefensuche (depth-first-search): Folgender Algorithmus führt eine Tiefensuche beginnend bei Knoten v in einem zusammenhängenden gerichteten Graphen durch, Ergebnis ist eine Aufteilung der Kanten in Baumkanten T, Vorwärtskanten F, Rückwärtskanten B und Crosskanten C, die Nummerierung dfsnr gibt an, in welcher Reihenfolge die Knoten besucht wurden. Die Menge $N(x) := \{y \in V | (x, y) \in E\}$ bezeichnet die Nachbarn von x.

```
forall u in V do
  dfsnr[u]:=0; visited[u]:=false; finished[u]:=false
od;
count:=0; T:={}; F:={}; C:={}; B:={}; dfs(v);

procedure dfs(x)
  visited[x]:=true; dfsnr[x]:=count; count:=count+1;
  forall y in N(x) do
    if not visited[y] then T:=T+{(x,y)}; dfs(y)
    elsif dfsnr[x]<dfsnr[y] then F:=F+{(x,y)}
    elsif finished[y] then C:=C+{(x,y)}
    else B:=B+{(x,y)}
  od;
  finished[x]:=true
end;
```

a) Zeigen Sie: G ist azyklisch genau dann, wenn $B = \emptyset$.

b) Zeigen Sie: Die Kanten in T bilden einen spannenden Baum.

c) Zeigen Sie: alle Kanten $(x, y) \in F$ führen zu Knoten y im Unterbaum von x (bzgl. T).

d) Zeigen Sie: alle Kanten $(x, y) \in C$ führen zu Knoten y in anderen Unterbäumen.

2. Anwendungen des dfs-Algorithmus

a) Zeigen Sie: Man kann jeden azyklischen Graphen so nummerieren, dass für alle Kanten (i, j) stets $i < j$ gilt. Solch eine Knotennummerierung bezeichnet man als Topologische Sortierung.

b) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der zu einem azyklischen Graphen eine Topologische Sortierung berechnet.

3. Die Berechnung des längsten (doppelpunktfreien) Weges in beliebigen Graphen ist NP-hart. Für azyklische Graphen gibt es Polynomialzeit-

Algorithmen. Entwickeln Sie mit der Greedy-Strategie einen effizienten Algorithmus zur Suche des längsten Weges zwischen zwei vorgegebenen Knoten u und v in einem azyklischen Graphen. Bringt eine Topologische Sortierung der Knoten Vorteile?

Begründen Sie, warum die Suche nach einem längsten Weg in allgemeinen Graphen mit ihrem Algorithmus nicht funktioniert.

4. Sie sind beauftragt, die Installation einer Klimaanlage zu planen. Dazu sind einige Arbeiten durchzuführen, deren Dauer und Abhängigkeiten durch folgende Tabelle angegeben werden:

Nr.	Vorgang	Dauer in Tagen	Unmittelbar vorausgehende Vorgänge
1	Steckdosen verlegen	16	
2	Mauerdurchbrüche herstellen	30	
3	Klimaanlage bestellen	1	
4	Starkstromkabel bestellen	1	
5	Deckenbeleuchtung planen	15	
6	Stromversorgung bestellen	1	
7	Malerarbeiten durchführen	10	1,2
8	Klimakanäle verlegen	20	2
9	Netzanschluß herstellen	10	2
10	Lieferzeit Klimaanlage	42	3
11	Lieferzeit Starkstromkabel	25	4
12	Kabel für Deckenbeleuchtung montieren	15	5
13	Lieferzeit Stromversorgung	44	6
14	Klimaanlage montieren	10	8,9,10
15	Starkstromkabel montieren	13	2,11
16	Deckenbeleuchtung montieren	11	12
17	Stromversorgung montieren	5	13
18	Klimaanlage testen	1	14
19	Klimaanlage einregulieren	2	18
20	Beleuchtung montieren	3	16
21	Stromversorgung testen	9	15,17

a) Wie lange dauert dieses Projekt mindestens? Überführen Sie die Tabelle dazu in einen geeigneten Graphen und benutzen Sie die Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben.

b) Finden Sie die Aufgaben, die sich nicht verzögern dürfen, wenn die Gesamtdauer sich nicht verlängern soll (kritischer Pfad im Graphen).

5. Gegeben seien zwei Strings $s_1 = a_0a_1 \dots a_l$ und $s_2 = b_0b_1 \dots b_m$.

a) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der den längsten gemeinsamen Teilstring in s_1 und s_2 findet, d.h., finde

$$\max\{k | \exists i, j \geq 0 \text{ mit } a_ia_{i+1} \dots a_{i+k-1} = b_jb_{j+1} \dots b_{j+k-1}\}$$

b) Versuchen Sie, dieses auf n Wörter $s_1, \dots, s_n$ zu erweitern.

Abgabe: Montag, 3. Juli, nach der Vorlesung (Box im Foyer 1. Stock)