Claus/Lewandowski Sommersemester 2000 Aufgabenblatt 3

Übungen zur Vorlesung „Entwurf und Analyse eff. Algorithmen“

---

1. Seien $s_1, \ldots, s_k$ und t Wörter über einem Alphabet A. Wir betrachten das Problem, eine Folge von möglichst wenigen Wörtern aus $s_1, \ldots, s_k$ zu finden, so dass deren Konkatenation das Wort t ergibt. Dabei dürfen Wörter aus $s_1, \ldots, s_k$ auch mehrfach verwendet werden.

Beispiel: Sei $s_1 = aab$, $s_2 = bbcc$, $s_3 = a$, $s_4 = b$, $s_5 = c$, $t = aabbcc$. Dann gilt $t = s_1 s_4 s_5 s_5$ sowie $t = s_3 s_3 s_2$, die gesuchte Lösung wäre $s_3 s_3 s_2$, da nur 3 statt 4 Wörter konkateniert werden müssen.

Konstruieren Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für dieses Problem, beweisen Sie die Korrektheit und schätzen Sie die Komplexität des Algorithmus ab.

2. Anton und Berta haben n Goldstücke geerbt, deren Wert jeweils $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ beträgt ($n \geq 1$).

a) Anton und Berta wollen wissen, ob man die Goldstücke so aufteilen kann, dass jede Person den gleichen Gesamtwert bekommt. Schreiben Sie einen Algorithmus zur Entscheidung dieses Problems, verifizieren Sie ihn und schätzen Sie die Zeitkomplexität ab.

b) Untersuchen Sie das Problem unter der Nebenbedingung, dass alle Goldstücke den Wert 1 oder 2 haben, d.h. $\forall\, i: \ w_i \in \{1, 2\}$, und für den Fall $\forall\, i: \ w_i \in \{1, 2, 3\}$

c) Die Zeitkomplexität wird in Abhängigkeit der Eingabegröße angegeben. Macht es für die Wahl des Algorithmus einen Unterschied, ob die Eingabe unär oder binär kodiert ist?

3. Der Median eines Feldes $A[1..n]$ ist das Element $A[i]$, wenn gilt $|\{k | A[k] \leq A[i]\}| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ und $|\{k | A[k] \geq A[i]\}| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Der Median ist das Element, das in der sortierten Folge an der Position $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ steht.

In der Vorlesung wird ein Verfahren vorgestellt, das den Median mit linear vielen Vergleichen berechnet. Wir betrachten nun das Problem in einem vorsortierten Feld. Sei $A[1..n]$ vorsortiert mit $A[i] \leq A[i+1]$, $1 \leq i < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ und $A[i] \leq A[i+1]$, $1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i < n$.

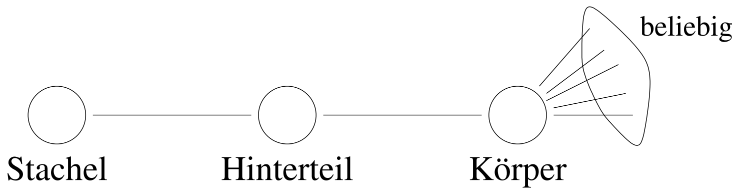
a) Konstruieren Sie einen Algorithmus, der den Median in dem vorsortierten Feld $A[1..n]$ bestimmt. Beweisen Sie die Korrektheit und bestimmen Sie die Zahl der erforderlichen Vergleiche des Algorithmus.

b) Konstruieren Sie einen Algorithmus, der zu einem k, $1 \leq k \leq n$ das Element findet, das in dem sortierten Feld $A[1..n]$ an der Stelle k stehen würde, und ermitteln Sie hierfür die im schlechtesten Fall erforderlichen Vergleiche.

4. Man nennt einen ungerichteten Graphen einen Skorpion, wenn er drei besondere Knoten hat: einen Stachel, das Hinterteil und den Körper.

- Der Stachel ist nur mit dem Hinterteil verbunden (Grad 1).
- Das Hinterteil ist nur mit dem Stachel und dem Körper verbunden (Grad 2).
- Der Körper ist mit allen Knoten des Graphen bis auf den Stachel verbunden (Grad $|V| - 2$).
- Die übrigen Knoten können untereinander beliebig verbunden sein.

Der Graph $G = (V, E)$ sei als Adjazenzmatrix gegeben. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Laufzeit $O(|V|)$ entscheidet, ob G ein Skorpion ist. Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus.



Abgabe: Montag, 19. Juni, nach der Vorlesung (Box im Foyer 1. Stock)