Claus/Lewandowski Sommersemester 2000 Aufgabenblatt 1

Übungen zur Vorlesung „Entwurf und Analyse eff. Algorithmen"

---

**1.** a) Gegeben seien Funktionen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Beweisen Sie bzw. widerlegen Sie folgende Behauptungen unter der Voraussetzung, dass $f, g \in O(h)$ gilt:

$$f + g \in O(h) \qquad f - g \in o(h) \qquad f \in O(g)$$

Gilt für beliebige $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stets $f \in O(g) \ \vee \ g \in O(f)$?

b) Zeigen Sie für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

(i) $f \in \Theta(2^{\lceil \log f \rceil})$

(ii) $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists c > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \ \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \leq c\, f(n)\}$

**2.** Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach der Ordnung $f \leq g :\Leftrightarrow f \in O(g)$:

$$2^{\sqrt{n}}, \quad 3^{\log(n^3)}, \quad n^n, \quad n^{3.01}, \quad 2^{n^2}, \quad \log(n)$$
$$n^3 \log(n), \quad \log^3(\log(n)), \quad n^2 2^n, \quad (n+2)^3,$$
$$n^{1.5}, \quad n^3 \log(n^3) + 1, \quad \sqrt{n!}, \quad n^{3 \log(n)}, \quad n^2 \log(n!)$$

**3.** Bestimmen Sie für die folgenden Rekursionsgleichungen die lösenden Funktion jeweils für $c < 1, c = 1$ und $c > 1$ in einer geschlossenen Form. Es gelte $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, $f(1) = g(1) = h(1) = i(1) = a$ und für alle $n > 1$

$$\begin{array}{rclrcl} f(n) & = & a + c \cdot f(\frac{n}{d}) & \qquad g(n) & = & a \cdot n + c \cdot d \cdot g(\frac{n}{d}) \\ h(n) & = & a + c \cdot h(n-1) & \qquad i(n) & = & a \cdot n + c \cdot i(n-1) \end{array}$$

Zeigen Sie das Resultat durch Induktion. Beschreiben Sie das Wachstumsverhalten der berechneten Lösungen in der $O$-Notation.

**4.** Bestimmung der maximalen Teilfolgensumme: Gegeben sei ein Feld $A(1..n)$ von $n$ Integerwerten (positiv und negativ). Gesucht ist der Wert

$$b = \max\{b_{l,r} : b_{l,r} = \Sigma_{i=l}^{r} A(i), 1 \leq l \leq r \leq n\}$$

Es sei $b = 0$, falls $A$ nur aus negativen Zahlen besteht. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der dieses Problem möglichst effizient löst. Geben Sie die Zeit- und Platzkomplexität an und begründen Sie diese.

**5. Zusatzaufgabe: (alternativ zu Aufgabe 4)** Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $b \geq 0$, $\mathrm{ggT}(a, b) = \max\{d | d \text{ teilt } a \text{ und } d \text{ teilt } b\}$ hat die Eigenschaften $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a \bmod b)$ und $\mathrm{ggT}(a, 0) = a$.

Programmieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung des ggT, und bestimmen Sie die Zeit- und Platzkomplexität.

**Abgabe: Montag, 15. Mai, nach der Vorlesung (Box im Foyer 1. Stock)**