1 Lineares Programm

1.1 Definition und Darstellung eines LP

Ein lineares Programm wird mit LP bezeichnet. Es handelt sich um ein Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und linearen Randbedingungen. Auf einer Menge $F \subset R^n$ der zulässigen Lösungen ist eine reellwertige Zielfunktion $z : F \to R$ definiert, die es zu minimieren gilt (oder zu maximieren).

$$\text{LP} : \quad \min z(x) \quad \text{für} \quad x \in F.$$

Definition 1 *Ein LP in Standardform $z : F \to R$ hat die Gestalt*

$$F = \{x \in R^n \mid Ax = b\,,\, x \geq 0\} \quad \textit{und} \quad z(x) = cx + d,$$

mit $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ sowie $c \in R^n$, $d \in R$.

Zwei Darstellungen von LP´s in Standardform heißen äqiuvalent, $(A, b, c, d) \sim (A', b', c', d')$, wenn es eine reguläre Matrix $D \in R^{m \times m}$ und ein $\delta \in R^m$ gibt mit

$$A' = DA \quad b' = Db\,, \quad c' = c + \delta A\,, \quad d' = d - \delta b.$$

Äquivalente Darstellungen beschreiben dasselbe LP. Sei $z : F \to R$ durch (A, b, c, d) dargestellt wie in obiger Definition, und $z' : F' \to R$ entsprechend durch das Äquivalente Tupel (A', b', c', d'), dann gilt $F = F'$ und $z = z'$.

Hierbei gilt auch die Umkehrung, sofern es einen inneren Punkt $x \in F$ gibt mit $x_i > 0$ für alle Koordinaten $i = 1, \ldots, n$. Dann sind zwei Darstellungen von $z : F \to R$ stets äquivalent.

Vorweggenommen, die Iterationsschritte (Pivotschritte) des Simplexalgorithmus bestehen aus dem Wechsel solcher Darstellungen, jedes Tableau beschreibt dasselbe LP in einer anderen (Basis-) Darstellung.

Definition 2 *Ein Optimierungsproblem $z : F \to R$ ist äquivalent zu einem LP in Standardform $z' : F' \to R$, wenn es affine, bijektive Abbildungen gibt*

$$t : F \to F', \quad \tau : R \to R \quad \textit{mit} \quad \tau(y) = ay + b \textit{ und } a > 0,$$

und das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "t"] \arrow[d, "z"] & F' \arrow[d, "z'"] \\ R \arrow[r, "\tau"] & R \end{tikzcd} .$$

Hierbei heißt $t : R^n \to R^m$ affin, genau dann wenn mit $\sum_i \lambda_i = 1$ gilt $t(\sum_i \lambda_i x_i) = \sum_i t(x_i)$.

Somit ist $x \in F$ optimal, d.h. $z(x) \leq z(x')$ für alle $x' \in F$ genau dann wenn $t(x) \in F'$ optimal in bezug auf z' ist.

Definition 3 *Ein zu einem LP in Standardform äquivalentes Optimierungsproblem $z : F \to R$ ist ebenfalls ein lineares Programm.*

Tatsächlich ist die Klasse der LP weiter gefasst, durch öffensichtlicheTransformationen, die nicht in das obige Schema fallen. Den inhärenten Transformationen des Simplexalgorithmus genügt jedoch obige Definition äquivalenter LP´s.

1.2 Beispiel zur Transformation eines LP in Standardform

Sei durch $F = \{x \in R^n \,|\, Ax \leq b\,,\, x \geq 0\}$ mit $z(x) = cx + d$ ein LP in Ungleichungsform gegeben. Dieses ist äquivalent zu folgendem LP in Standardform

$$F' = \{(x,y) \in R^{n+m} \,|\, (A, E_m)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b\,,\, (x,y) \geq 0\} \quad \text{mit} \quad z'(x,y) = cx + d.$$

Die entsprechenden affinen Bijektionen sind gegeben durch:

$$t : F \to F' \quad \text{mit} \quad x \mapsto (x, b - Ax) \quad \text{und} \quad \tau = \mathrm{id}_R.$$

Es ist $x \in F$ optimal genau dann wenn (x,y) mit $y = b - Ax$ optimal in F' ist. Hierbei bezeichnet E_m die Einheitsmatrix des $R^{m\times m}$.

1.3 Basislösungen und Ecken eines LP

Sei $z : F \to R$ ein LP (in Standardform) mit Darstellung $F = \{Ax = b\,,\, x \geq 0\}$ und $z(x) = cx + d$. Für $x \in F$ enthalte $I_x = \{i \,|\, x_i \neq 0\}$ die Indices der Koordinaten ungleich 0.

Definition 4 *Eine zulässige Lösung $x \in F$ heißt Basislösung, genau dann wenn $A_i\,,\, i \in I_x$ linear unabhängige Spalten von A sind.*

Zur Notation: für $A \in R^{m\times n}$ ist durch $A = (A_1, \ldots, A_n)$ mit $A_i \in R^m$ für $i = 1, \ldots, n$ die Aufteilung in n Spalten gegeben. Für eine Teimenge$B \subset \{1, \ldots, n\}$ der Indices sei $B = \{i_1, i_2 \ldots, i_r\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ und $r = |B|$. Dann ist $A_B := (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ diejenige Matrix, welche aus den Spalten mit Indices in B besteht. Entsprechend für $x \in R^n$ ist $x_B = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Mit $N = \{1, \ldots, n\}\backslash B$ notieren wir $A = (A_B, A_N)$, obwohl die Spalten von A_B <u>nicht</u> die ersten $|B|$- vielen Spalten von A sind. Jedoch gilt mit der entsprechenden Notation $x = (x_B, x_N)$:

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N.$$

Ferner bezeichnet E_m die Einheitsmatrix des R^m, und e_j den j-ten Einheitsvektor mit Koordinaten $e_{j_i} = 1$ für $i = j$ und $e_{j_i} = 0$ sonst.

Eine zulässige Lösung $x \in F$ heißt Ecke (von F), genau dann wenn x nicht innerhalb der Verbindungsgeraden zweier Punkte $u, v \in F$ liegt: Aus $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ mit $\lambda \in [0,1]$ folgt $x = u$ oder $x = v$.

Satz 1 *Eine zulässige Lösung $x \in F$ eines LP $z : F \to R$ ist Basislösung, genau dann wenn x Ecke von F ist.Ist $x \in F$ keine Ecke, dann existiert eine $u \in F$, sodaß u weniger Koordinaten $\neq 0$ hat als x und zudem gilt $z(u) \leq z(x)$. Ist $x \in F$ keine Ecke und F beschränkt, dann existiert eine solche affine Kombination $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ mit $u, v \in F$, sodaß u, v weniger Koordinaten $\neq 0$ haben als x.*

Somit ist der Begriff Basislösung unabhängig von der Darstellung eines LP, zudem folgt die Existenz von Basislösungen bzw. optimalen Basislösungen.

Corollar 1 *Sei $z : F \to R$ ein LP mit $F \neq \emptyset$, dann hat F eine Basislösung. Hat F eine optimale Lösung, (d.h. z ist nach unten beschränkt), dann hat F auch eine optimale Basislösung.*

Dies folgt unmittelbar aus obigen Satzes.

1.4 Zulässige Menge eines LP als Polyeder

Definition 5 *Ein Polyeder $F \subset R^n$ ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge $B \subset R^n$ von Punkten:*

$$F = conv(B).$$

D.h. mit $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ gilt $F = \{\sum_i \lambda_i b_i \mid \sum_i \lambda_i = 1\, ,\, \lambda_i \geq 0\}$.

Hierbei ist ein $b \in B$ notwendig, genau dann wenn b eine Ecke von F ist.

Sei F eine zulässige Menge eines LP. Eine Ecke $x \in F$ ist mit $I = \{i \mid x_i \neq 0\}$ eindeutig bestimmt, durch $A_I x_I = b$, da A_I injektiv ist (es sind die Spalten linear unabhängig).

Satz 2 *Die zulässige Menge F eines LP hat nur endlich viele Ecken ! Ferner sind äquivalent:*

1. *F ist beschränkt,*
2. *F ist Polyeder,*
3. *$F = conv(B)$ mit $B \subset F$ ist die Menge der Ecken von F.*

1.5 reduzierte Darstellung und zulässige Basen

Sind in der Darstellung $F = \{Ax = b\, ,\, x \geq 0\}$ mit $z(x) = cx + d$ eines LP in Standardform $z : F \to R$ die Zeilen von A linear unabhängig, dann spricht man von einer reduzierten Darstellung.

Ist $F \neq \emptyset$, dann hat das LP $z : F \to R$ eine reduzierte Darstellung. In dieser gilt für $A \in R^{m\times n}$ dann $m = \text{Rang} A \leq n$. Für linear unabhängige Spalten $A_i\, ,\, i \in I$ gibt es eine Teilmenge $B \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $I \subset B$ und $A_B \in R^{m\times m}$ regulär (Basisergänzungssatz).

Definition 6 *In dieser Situation heißt B zulässige Basis genau dann wenn $A_B \in R^{m\times m}$ regulär ist und $A_B^{-1} b \geq 0$ gilt, (jede Koordinate von $A_B^{-1} b$ ist nicht negativ).*

Dieser Begriff ist Abhängig von einer Darstellung (A, b, c, d) des LP $z : F \to R$, jedoch nicht innerhalb einer Äquivalenzklasse $(A, b, c, d)_\sim$ von Darstellungen.

Die zulässigen Basen einer reduzierten Darstellung stehen zu den Basislösungen mittels einer surjektiven Abbildung ϕ der zulässigen Basen auf die Menge der Basislösungen in Zusammenhang.

$$\phi : B \mapsto x = (x_B, x_N) \quad \text{mit} \quad x_B = A_B^{-1} b \quad \text{und} \quad x_N = 0 \quad (\text{d.h. } I_x \subset B).$$

Im allgemeinen ist ϕ nicht injektiv, man spricht dann von einem entarteten Darstellung des LP. Wir bezeichnen die Basislösung $\phi(B)$ einer zulässigen Basis ebenfalls mit $x_B := \phi(B)$. Anstelle von $x_B = (x_{BB}, x_{NN})$ notieren wir $x_B = (x_B, x_N)$. Somit ergibt sich die Bedeutung von x_B aus dem Kontext.

2 Simplex Algorithmus

2.1 Das Optimalitätskriterium

Sei B eine zulässige Basis mit zugehöriger Basislösung $x_B = (x_B, x_N)$. Gilt $c_B = 0$ und $c_N \geq 0$, dann ist x_B optimal. Für jede andere zulässige Lösung $x' \in F$ gilt:

$$z(x_B) = d \leq c_N x'_N + d = z(x').$$

2.2 Der Pivotschritt des Simplexalgorithmus

Sei B zulässige Basis mit Basislösung $x = x_B$. Ferner sei $c_B = 0$ und für ein $j \notin B$ sei $c_j < 0$, d.h. das Optimalitätskriterium ist nicht erfüllt. Es ist A_j Linearkombination $A_j = A_B y_B$ der Spalten von A_B mit $y_B \in R^m$. Mit $y_N = -e_j$ erfüllt $y = (y_B, y_N) \in R^n$ die homogene Gleichung $Ay = 0$. Für jedes positive $\theta \in R_{\geq 0}$ erfüllt die Variationslösung

$$x_\theta := x - \theta y,$$

stets $Ax_\theta = b$. Für $l \notin B$ ist $x_{\theta,l} = 0$ oder $x_{\theta,l} = \theta$. Somit ist $x_\theta \in F$ eine zulässige Lösung, solange für alle $l \in B$ gilt

$$x_{\theta,l} = x_l - \theta y_l \geq 0.$$

Genau im Fall $y_B \leq 0$ ist $x_\theta \in F$ eine zulässige Lösung für alle $\theta \geq 0$. Der Zielfunktionswert dieser Variationslösung lautet:

$$z(x_\theta) = c_N x_{\theta,N} + d = \theta c_j + d = \theta c_j + z(x) \leq z(x).$$

Dieser nimmt für $\theta \to +\infty$ ab. Entweder ist $x_\theta \in F$ für alle $\theta \geq 0$, d.h. $y_B \leq 0$, und somit die Zielfunktion z auf F nach unten unbeschränkt, oder es existiert ein θ' maximal, sodaß für alle $\epsilon > 0$ gilt $x_{\theta'+\epsilon} \notin F$. D.h. für ein $l \in B$ gilt

$$x_{\theta'+\epsilon,l} = x_l - \theta' y_l - \epsilon y_l < 0.$$

In diesem Fall ist $y_l > 0$ und aus Stetigkeitsgründen $x_{\theta',l} = 0$. Genauer gilt

$$\theta' = \frac{x_l}{y_l} = min\{\frac{x_k}{y_k} \mid k \in B \quad \text{mit} \quad y_k > 0\}.$$

Wegen $y_l > 0$ ist für $B' := B \setminus l \cup j$ ebenfalls $A_{B'}$ regulär.

Wegen $x_{\theta'} = A_{B'}^{-1} b \geq 0$ ist B' weitere zulässige Basis mit zugehöriger Basislösung $x' := x_{\theta'}$. Diese hat den Zielfunktionswert

$$z(x') = \theta' c_j + z(x).$$

Somit ist nur im Falle $\theta' = 0$ und somit $x_l = 0$ keine Abnahme des Zielfunktionswertes möglich.

Satz 3 *Sei B zulässige Basis mit Basislösung $x \in F$, sowie (A, b, c, d) eine reduzierte Darstellung mit $c_B = 0$. Im zugehörigen Pivotschritt führt der Simplexalgorithmus den erstmöglichen der folgenden drei Schritte aus:*

1. *Überprüfen des Optimalitätskriteriums, im Fall $c_N \geq 0$ stoppt der Algorithmus mit der Optimalen Lösung x.*
2. *Feststellen einer nach unten unbeschränkten Zielfunktion z, im Fall $y_B \leq 0$ (mit dem von $j \notin B$ mit $c_j < 0$ abhängigen y_B) stoppt der Algorithmus mit der Auskunft einer unbeschränkten Zielfunktion.*
3. *Wechsel zu einer neuen zulässigen Basis B' mit Basislösung x' mit besserem (oder zumindest gleichem) Zielfunktionswert*

   $$z(x') \leq z(x).$$

   Hiernach widerholt sich der Pivotschritt.

Mindestens einer dieser drei Schritte ist ausführbar.

Gesetzt den Fall wir verfügen über eine zulässige Basis B und Basislösung $x = (x_B, x_N)$ mit $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$, sowie eine Darstellung (A, b, c, d) mit $c_B = 0$. Dann müssen wir die folgenden Aufgaben leisten:

1. Feststellen ob $c_N \geq 0$, andernfalls die Auswahl eines $j \notin B$ mit $c_j < 0$.
2. Bestimmen der Linearkombination y_B mit $A_j = A_B y_B$.
3. Feststellen ob $y_B \leq 0$, andernfalls wahl eines solchen $l \in B$ mit

   $$\theta' = \frac{x_l}{y_l} = min\{\frac{x_k}{y_k} \mid k \in B \text{ und } y_k > 0\}.$$

4. Bestimmung der neuen Basis B' und neuen Basislösung $x' = x - \theta' y$.
5. Auffinden einer neuen Darstellung (A', b', c', d') passend zu B' mit $c'_{B'} = 0$ sodaß weiterhin alle diese Pivotschritte leicht ausgeführt werden können.

Um diese Schritte in übersichtlicher Form ausführen zu können führen wir das Simplextableau ein.

2.3 Simplex Tableau einer zulässigen Basis

Sei $z : F \to R$ ein LP in Standardform mit reduzierter Darstellung (A, b, c, d) mit $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m, c \in R^n$ sowie $d \in R$. Dieser Darstellung ordnet man ein Tableau $T \in R^{m+1 \times n+2}$ zu der Gestalt:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile und Spalte von T werden als 0-te Zeile, bzw. 0-te Spalte bezeichnet.

Für eine zulässige Basis $B \subset \{1, \dots, n\}$ mit zugehörigem Tableau

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix},$$

verlangen wir von $c = (c_B, c_N)$ und $A = (A_B, A_N)$ daß gilt: $c_B = 0$ sowie A_B ist eine Permutationsmatrix. Es ist $A = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(m)})$ für eine Permutation $\pi : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$, die i-te Spalte $e_{\pi(i)}$ ist der $\pi(i)$-te Einheitsvektor.

Ein solches Tableau existiert stets. Sei (A, b, c, d) eine beliebige (reduzierte) Darstellung, dann ist

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & c_B \\ 0 & A_B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c' & -d' \\ 0 & A' & b' \end{pmatrix},$$

Tableau der äquivalenten Darstellung (A', b', c', d'), sodaß ferner gilt $c'_B = 0$ und es ist $A'_B = E_m$ sogar die Einheitsmatrix des $R^{m \times m}$.

Dies ergibt sich durch einfaches Ausrechnen obiger Matrizenmultiplikation.

Sei $x = x_B$ zugehörige Basislösung und $y_B \in R^m$ mit $A_j = A_B y_B$. Vorweggenommen, es gilt $y_B \leq 0$ genau dann wenn $A_j \leq 0$ gilt.

Ausführlich lautet ein solches Tableau mit einer Spalte $l \in B$ und einer Spalte $j \notin B$ wie folgt:

$$T_B := \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \cdots & 0 & \cdots & c_j & \cdots & c_m & -d \\ 0 & a_{1\,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1\,j} & \cdots & a_{1\,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k\,1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{k\,j} & \cdots & a_{k\,n} & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m\,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{m\,j} & \cdots & a_{m\,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Hierbei sei $c_j < 0$ und $\frac{b_k}{a_{k\,j}} = \min\{\frac{b_\kappa}{a_{\kappa\,j}} \,|\, a_\kappa > 0 \quad \kappa = 1, \dots, m\}$. Ferner sei $A_l = e_k$ sodaß gilt,

$$b_k = \sum_{i \in B} A_{k\,i} x_i = A_{k\,l} x_l = x_l \quad \text{da für} \quad i \neq l \quad \text{gilt} \quad A_{k\,i} = 0.$$

$$a_{k\,j} = \sum_{i \in B} A_{k\,i} y_i = A_{k\,l} y_l = y_l,$$

gilt entsprechend. Für $\lambda \in B \setminus l$ ist $A_\lambda = e_\kappa$ mit $\kappa \neq k$ und $y_\lambda > 0$ genau dann wenn $a_\kappa > 0$. Folglich gilt

$$\frac{x_l}{y_l} = \frac{b_k}{a_{k\,j}} = \min\{\frac{b_\kappa}{a_{\kappa\,j}} \,|\, a_\kappa > 0 \quad \kappa = 1, \ldots, m\} = \min\{\frac{x_\lambda}{y_\lambda} \,|\, y_\lambda > 0 \quad \lambda \in B\}.$$

Also folgt $\theta' = \frac{b_k}{a_{k\,j}}$ und die neue Basis lautet $B' = B \setminus l \cup j$.

Nun führen wir folgende Zeilenoperationen auf T_B durch:

- das $-\frac{c_j}{a_{k\,j}}$-fache der k-ten Zeile wird zur 0-ten Zeile addiert,
- das $-\frac{a_{i\,j}}{a_{k\,j}}$-fache der k-ten Zeile wird zur i-ten Zeile addiert, für $i =\neq k, 0$,
- die k-te Zeile wird durch $a_{k\,j}$ dividiert.

Somit erhalten wir das folgende Tableau:

$$T_{B'} := \begin{pmatrix} 1 & c'_1 & \cdots & 0 & \cdots & c_j & \cdots & c_m & -d \\ 0 & a'_1 & \cdots & -\frac{a_{1\,j}}{a_{k\,j}} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1\,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{k\,1} & \cdots & \frac{1}{a_{k\,j}} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{k\,n} & b'_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m\,1} & \cdots & -\frac{a_{m\,j}}{a_{k\,j}} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{m\,n} & b'_m \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer linksmultiplikation des Tableau T_B mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\frac{c_j}{a_{k\,j}} & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & -\frac{a_{1\,j}}{a_{k\,j}} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{a_{k\,j}} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{a_{1\,j}}{a_{k\,j}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. zum Tableau $t_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & c' & -d' \\ 0 & A' & b' \end{pmatrix}$ gehört eine äquivalente Darstellung (A', b', c', d').

Für $i \in B \cap B'$ ist $a_{i\,k} = 0$, sodaß diese Zeilenoperationen keine veränderung dieser Spalten erbringt. So ist weiterhin $A'_{B'}$ eine Permutationsmatrix und weiter gilt $c'_{B'} = 0$.

Satz 4 *Auf dem Tableau T_B einer zulässigen Basis ist die Pivotoperation durch folgende Schritte gegeben:*

1. *gilt $c_N \geq 0$, so ist das Optimalitätskriterium erfüllt.*
2. *Andernfalls wähle ein $j \notin B$ mit $c_j < 0$. Gilt $A_j \leq 0$, dann ist die Zielfunktion z nach unten unbeschränkt auf F.*

3. *Andernfalls bestimme k mit $\frac{b_k}{a_{k\,j}} = \min\{\frac{b_\kappa}{a_{\kappa\,j}} \,|\, a_{\kappa\,j} > 0 \quad \kappa = 1, \ldots, m\}$ und $l \in B$ mit $A_l = e_k$. Die neue Basis ist dann $B' = B \setminus l \cup j$. Führe die obigen Zeilenumformungen durch, sodaß $c_j = 0$ und $A_j = e_k$ gilt. Somit ergibt sich ein Tableau $T_{B'}$ zur neuen Basis B'. Der Pivotschritt wird erneut ausgeführt.*

2.4 Kreisen des Simplexalgorithmus, Bland´s Rule

Soweit der Pivotschritt bisher vorgestellt wurde, können in der Abfolge $B^1, B^2, \ldots, B^n, B^{n+1}$ der betrachteten zulässigen Basen diese sich wiederholen. Es könnte $B^{n+1} = B^1$ gelten. Man nennt dies ein Kreisen des Simplexalgorithmus, eventuell terminiert das Programm nicht.

Der Pivotschritt ist bislang nicht determinisitisch. Die Auswahl des Index $j \notin B$ mit $c_j < 0$ ist offen, sowie die Wahl desjenigen $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\frac{b_k}{a_{k\,j}} = \min\{\frac{b_\kappa}{a_{\kappa\,j}} \,|\, a_{\kappa\,j} > 0\}$. Es könnte hier mehrere Minima geben. Damit ist auch die Wahl des Index $l \in B$ mit $A_l = e_k$ offen, der die Basis im Übergang zur Nächsten verlässt: $B' = B \setminus l \cup j$.

Zur Wahl der Indices die beim Pivotieren in die Basis eintreten und diese verlassen existieren zwei Entscheidungsregeln.

Satz 5 *Die zum Basiswechsel im Pivotschritt des Simplexalgorithmus anwendbaren Auswahlregeln "Bland´s Rulelauten wie folgt:*

1. *wähle $j \notin B$ minimal mit $c_j < 0$, sodaß j in die Basis eintritt.*
2. *wähle unter denjenigen Indices $l \in B$ mit $A_l = e_k$ und $\frac{b_k}{a_{k\,j}} = \min\{\frac{b_\kappa}{a_{\kappa\,j}} \,|\, a_{\kappa\,j} > 0\}$, den kleinsten. Somit ist der Index l minimal, der die Basis verlässt.*

Somit lautet die neue Basis $B' = B \setminus l \cup j$. Unter einhaltung der Regeln 1) und 2) ist die Abfolge $B^1, \ldots, B^n$ der Basen ohne Wiederkehr einer Basis. In diesem Fall terminiert der Simplexalgorithmus.

Sofern ein Kreisen auftritt, in der Abfolge $B^1, B^2, \ldots, B^n, B^{n+1}$ der beim pivotieren betrachteten Basen, mit $B^1 = B^{n+1}$, ändert sich jedenfalls der Zielfunktionswert nicht. Sei x^i die zugehörige Basislösung und (A^i, b^i, c^i, d^i) die jeweils zugehörige Darstellung dann gilt für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$d^i = z(x^i) = z(x^j) = d^j.$$

Unter den Indices, welche in die Basen ein- und austreten sei $q \in \{1, \ldots, n\}$ maximal. Ferner sei B^r eine Basis in deren Nachfolger B^{r+1} der Index q eintritt, und B^s eine Basis aus der q austritt:

$$B^{r+1} = B^r \setminus l \cup q \quad \text{für ein} \quad l \in B^r,$$

$$B^{s+1} = B^s \setminus q \cup p \quad \text{für ein} \quad p \in B^r,$$

Mit den Bezeichnungen $x = x^s\, A = A^s$ und $B = B^s$ sei $y = (y_B, y_N)$ die homogene Lösung $Ay = 0$ mit $A_B y_B = A_p$. Für die Variationslösung $x_\theta = x - \theta y$ im Übergang von B^s zu B^{s+1} gilt für alle $\theta \in R$

$$Ax_\theta = b.$$

Die Funktion $z : F \to R$ lässt sich auf den affinen Unterraum $U = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$ fortsetzen. Sowohl U als auch z hängen nich von der Konkreten Darstellung in der Aquivalenzklasse $(A^s, b^s, c^s, d^s)_\sim$ ab. Für alle $x \in U$ gilt $z(x) = c^s x + d = c^r x + d$. Mit $x_\theta \in U$ für alle $\theta \in R$ folgt insbesondere

$$c^r x_\theta = c^s x_\theta.$$

Für alle anderen Indices $l \in B$, $l \neq q$ gilt $\frac{x_l}{y_l} > \frac{x_l}{y_l} = \min\{\frac{x_\lambda}{y_\lambda} \mid y_\lambda > 0\, ,\, \lambda \in B\}$. Sonst hätte man mit Regel 2) einem $l \in B$ mit $l < q$ gegenüber q den Vorzug gegeben. Im Übergang zu B^{s+1} hätte l die Basis verlassen, anstelle von q. Daher existiert ein $\theta' \in R$ sodaß für alle $l \neq q$ gilt

$$x_{\theta'\, l} = x_l - \theta' y_l \geq 0,$$

aber

$$x_{\theta'\, q} = x_q - \theta' y_q < 0.$$

Für $i < q$ gilt $c_i^r \geq 0$. Für $i \in B^r$ ist das klar. Für $i \notin B^r$ hätte man ansonsten aufgrund der Regel 1) i anstelle von q in die Basis B^{r+1} eintreten lassen.

Für $i > q$ gilt $i \in B^r$ genau dann wenn $i \in B^s$, denn keiner dieser Indices ist ein eine Basis des Zyklus $B^1, \ldots, B^n$ ein- noch ausgetreten. Für $i \in B^r$ gilt $c_i^r = 0$. Für $i \notin B^s$ gilt aber $x_{\theta'\, i} = 0$, denn für den einzig möglichen Ausnahme p gilt $p < q$. Somit sind im folgenden Alle Summanden nicht negativ:

$$c^r x_{\theta'} = \sum_{i<q} c_i^r x_{\theta'\, i} + c_q^r x_{\theta'\, q} + \sum_{i>q} c_i^r x_{\theta'\, i}.$$

Aus c_q^r , $x_{\theta'\, q} < 0$ folgt also $c^r x_{\theta'} > 0$.

Für $i \in B^s$ gilt $c_i^s = 0$, für $i \notin B^s$ und $i \neq p$ gilt $x_{\theta'\, i} = 0$. Ferner ist $c_p^s < 0$ und $x_{\theta'\, p} = \theta' > 0$. Somit sind alle folgenden Summanden Null, bis auf $c_p^s x_{\theta'\, p}$.

$$c^s x_{\theta'} = \sum_{i \neq p} c_i^s x_{\theta'\, i} + c_p^s x_{\theta'\, p} = c_p^s x_{\theta'\, p} < 0.$$

Einerseits gilt $c^r x_{\theta'} > 0$, andererseits $c^s x_{\theta'} < 0$, ein Widerspruch, da beide Werte gleich sind. Unter Beachtung von Bland´s Rule, 1) und 2) im obigen Satz kann sich eine Basis nicht wiederholen. Somit ist ein Kreisen ausgeschlossen. Da es nur endlich viele Basen gibt muß der Simplexalgorithmus terminieren.

2.5 Initialisierung des Simplexalgorithmus

Sei $z : F \to R$ ein LP in Standardform, gegeben durch $F = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$ und $z(x) = cx + d$ mit $A \in R^{m \times m}$, $b \in R^m$ sowie $c \in R^n$, $d \in R$. Der Gaußsche Algorithmus transformiert aus $Ax = b$ ein äquivalentes Gleichungssystem aus dem entweder $F = \emptyset$ hervorgeht, oder ein System $A'x = b'$ dessen Zeilen von A' linear unaghängig sind (durch streichen unnötiger Zeilen). Nach einer Multiplikation der entsprechenden Zeilen mit -1 können wir im weiteren von $b' \geq 0$ ausgehen.

Durch $F' = \{(x,y) \in R^{n+m} \,|\, (A', E_m)\binom{x}{y} = b'\,,\, (x,y) \geq 0\}$ und $z'(x,y) = -eA'x + eb'$ für ein $e \in R^m$ ist ein Hilfs-LP in reduzierter Darstellung gegeben. Wegen $b' \geq 0$ ist $(0,b) \in R^{n+m}$ offensichtlich eine Basislösung: $A'0 + E_m b' = b'$, mir Basis $B = \{n+1, \ldots, n+m\}$. Es ist $F' \neq \emptyset$.

Das Tableau

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & (-eA', 0) & -eb' \\ 0 & (A', E_m) & b' \end{pmatrix},$$

erfüllt mit $c_B = (-eA', 0)_B = 0$ und $(A', E_m)_B = E_m$ die Voraussetzungen des Pivotschrittes.

Für $(x,y) \in F'$ gilt $A'x + y = b'$. Setzen wir den Vektor e fest durch $e_i = 1$ für $i = 1, \ldots, m$, dann ergibt sich die Zielfunktion zu

$$z'(x,y) = -e(A'x - b') = ey = \sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Somit ist die Zielfunktion durch 0 nach unten beschränkt. Gilt nun $z'(x',y') > 0$ für eine optimale Lösung $(x',y') \in F'$, dann ist das ursprüngliche LP nicht lösbar: $F = \emptyset$. Denn jede Lösung $x \in F$ mit $A'x = b'$ zieht eine Lösung $(x,0) \in F'$ nach sich mit $z'(x,0) = 0$.

Andernfalls ist mit $z'(x',y') = 0$ offensichtlich $y' = 0$ und x' erfüllt $A'x' = b'$, sowie $x' \geq 0$. Damit ist x' sogar eine Basislösung von $z : F \to R$. Da schon $(x', 0)$ eine Basislösung ist, sind die entsprechenden Spalten von A' linaer unabhängig.

Für das Hilfs-LP $z' : F' \to R$ ergibt sich ein kanonisches Starttableau T_B, aus dem sich mit endlich vielen Pivotschritten eine optimalen Lösung (x,y) des Hilfs-LP ergibt. Aus $y \neq 0$ folgt $F = \emptyset$, mit $y = 0$ ist x eine zulässige Basislösung des initialen LP $z : F \to R$.

Aus den Indices $I = \{i \,|\, x_i \neq 0\}$ lässt sich mit dem Basisargänzungssatz eine Basis $B \supset I$ bilden, zu der x eine zugehörige Basislösung ist. Ein zugehöriges Startablaeu T_B ergibt sich wie früher schon diskutiert wie folgt:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & c_B \\ 0 & A_B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c' & -d' \\ 0 & A' & b' \end{pmatrix}.$$

Hier gilt $c'_B = 0$ und $A'_B = E_m$ ist die Einheitsmatrix. Ab dieser Stelle können wir den Simplexalgorithmuns mit den Pivotschritten zu Ende bringen. Somit hat der gesamte Simplexalgorithmus die folgende Gestalt:

Satz 6 *Sei $z : F \to R$ ein LP in Standardform mit $F = \{x \in R^n \,|\, Ax = b\}$ und $z(x) = cx + d$. Der Simplexalgorithmus gliedert sich in folgende Schritte:*

1. *Wende den Gaußschen Algorithmus (oder einen Anderen) an zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Entweder dieses ist unlösbar, $F = \emptyset$, oder durch streichen unnötiger Zeilen im Umgeformten System erhält man eine reduzierte Darstellung des LP.*

2. *Das Hilfs-LP* $F' = \{(x,y) \in R^{n+m} \mid (A', E_m)\binom{x}{y} = b'\,,\,(x,y) \geq 0\}$ *mit* $z'(x,y) = -eA'x + eb'$ *liegt in reduzierter Darstellung vor, sodaß auch die Voraussetzungen des Pivotschrittes* $c_B = 0$ *und* $(A', E_m)_B$ *Permutationsmatrix, erfüllt sind, in bezug auf die Basis* $B = \{n+1, \ldots, n+m\}$. *In diesem Hilfs-LP wird eine optimale Basislösung* $(x,y) \in R^{n+m}$ *bestimmt. Gilt* $z(x,y) = 0$, *d.h.* $y = 0$, *so ist* x *eine Basislösung des ursprünglichen LP* $z : F \to R$. *Andernfalls ist dieses Unlösbar, es gilt* $F = \emptyset$.

3. *Zur Basislösung* x *wird mit dem Basisergänzungssatz eine zugehörige Basis* $B \subset \{1, \ldots, n\}$ *gewählt. (Die resultierende Basis des Hilf-LP ist nicht notwendig in* $\{1, \ldots, n\}$ *enthalten).*

4. *Aus der vorliegenden Darstellung* (A, b, c, d) *des LP´s mit zulässiger Basis* B *erhält man durch Matrizenmultiplikation*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & c_B \\ 0 & A_B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix}$$

ein Starttableau T_B, *welches die Voraussetzungen des Pivotschrittes erfüllt.*

5. *Es sind die Pivotschritte auszuführen, welche entweder in* $F = \emptyset$ *also einem unlösberen LP, oder in einer nach unten unbeschränkten Zielfunktion* z *auf* F, *oder mit einer optimalen Basislösung* $x \in F$ *enden, mit*

$$z(x) \leq z(x') \quad \text{für alle} \quad x' \in F.$$

Das Auslesen von x *aus dem Endtableau ist trivial.*

2.6 Ermittlung der zugehörigen Basislösung aus einem Tableau

Dies ist denkber einfach. Sei $x = (x_B, x_N)$ die Basislösung zum Tableau

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & c & -d \\ 0 & A & b \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $x_N = 0$ und $x_B = A_B^{-1} b$. Da A_B eine Permutationsmatrix ist, kann x_B direkt aus dem Tableau abgelesen werden. Für $l \in B$ mit $A_l = e_k$ gilt $x_l = b_k$. Somit ist die erhaltene optimale Lösung direkt aus dem finalen Tableau abzulesen, welches dem Optimalitätskriterium genügt.