Seminar

Optimierung industrieller Anwendungsprobleme

Betreuung: Prof. Claus, Dr. Schmelzer (flexis), Buchholz

Ausarbeitung
des
Seminarvortrags

Petrinetze und CP in der Produktionsplanung

Gehalten am 20.12.99
von
Sebastian Ellinger

Beschreibung des Car-Sequencing Problems

In der modernen Autoherstellung befinden sich die Autos auf einem Fließband, welches sich durch unterschiedliche Arbeitsbereiche bewegt (Abbildung 1). Jedes dieser Arbeitbereiche ist darauf spezialisiert eine besondere Aufgabe zu verrichten, wie z.B. Schiebedächer, Radios oder Klimaanlagen zu montieren. Für jedes Modell (A,B,C oder D), zeigt Tabelle 1 die zu montierende Ausstattung an. Kommt ein Auto in einen Arbeitsbereich, fangen Mechaniker an, an diesem Auto zu arbeiten. Während sich das Auto auf dem Fließband durch den Arbeitsbereich bewegt, gehen die Mechaniker mit dem Auto mit, um die Montage durchzuführen. Die Produktionslinie ist so entworfen, daß es den Mechanikern möglich ist ihre Arbeit zu beenden während sich das Auto noch in ihrem Arbeitsbereich befindet. Z.B. wenn die Zeit zur Installation eines Schiebedaches 20 min beträgt und wenn ein neues Auto alle vier Minuten auf das Fließband kommt, dann sind im Arbeitsbereich für die Schiebedachmontage gleichzeitig fünf Auto.

Eine Produktionslinie wird normalerweise dazu benötigt, um Autos unterschiedlicher Modelle herzustellen. Die Zahl der benötigten Autos für jedes Modell während einer Produktionseinheit wird als *production requirement* (Produktionserfordernis) bezeichnet. Mehr noch, jeder Arbeitsbereich ist durch seine Kapazität eingeschränkt. Z.B. wenn drei Mechanikerteams damit beschäftigt sind, Schiebedächer zu montieren, dann kann der Arbeitsbereich in dem die Schiebedächer montiert werden nie mehr als drei Automodelle verkraften, die als Ausstattungsmerkmal ein Schiebedach benötigen. Würde das nicht sichergestellt, so würden die Mechaniker nicht in ihrem Arbeitsbereich fertig werden und das Band müßte angehalten werden; was die Kosten beträchtlich steigen lassen würde.

Capacity Constraints

Das Verhältnis (Anzahl der Teams)/(Arbeitsgebietslänge) wird als *capacity constraints* (Kapazitätsbeschränkung) des Arbeitsbereichs bezeichnet. In Abbild 1 ist zu sehen, daß die Kapazitätsbeschränkung des Schiebedachgebiets 3/5 beträgt während jene des Autoradiobereiches 2/3 beträgt.

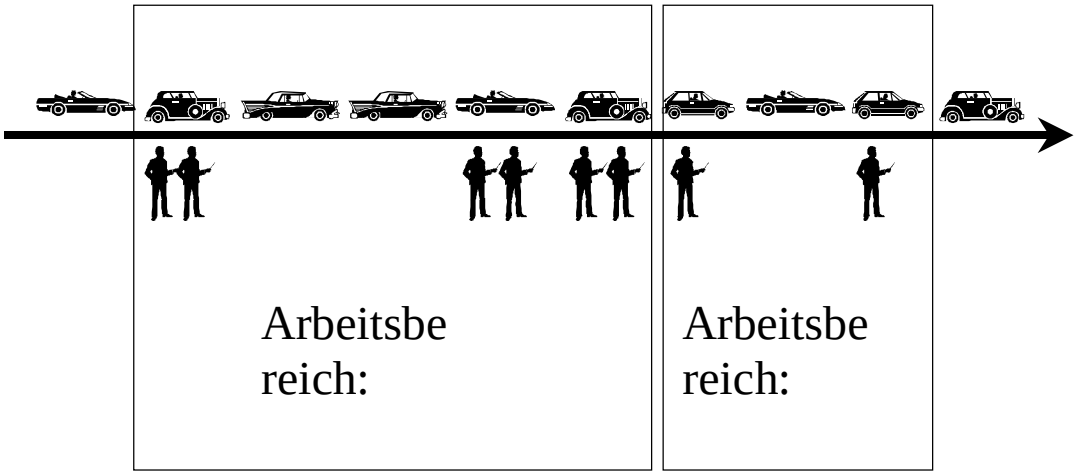

Abbildung 1: Produktionslinie

In Tabelle 1 sind die Modelle mit ihren Ausstattungsmerkmalen aufgelistet, wobei hier zu beachten ist, daß die Modelle A und D exakt die gleichen

Ausstattungsmerkmale haben, weshalb man sie eigentlich auch zusammen in eine Equivalenzklasse packen könnte. Stellt man sich vor, daß es noch mehr Ausstattungsmerkmale gibt, die hier der Einfachheit halber vom Autor des Artikels weggelassen worden sind, so kann man sich vorstellen, daß es sich hierbei um ein Versehen handeln könnte.

	Schiebdach	Autoradio
Modelle: A	Nein	Ja
B	Ja	Nein
C	Ja	Ja
D	Nein	Ja(Nein)

Tabelle 1: Ausstattungsmerkmale

Production Requirements

In einer Produktionseinheit müssen eine bestimmte Anzahl N von Autos gebaut werden. Diese Anzahl läßt sich differenzieren in verschiedene Varianten, von denen ihrerseits wieder eine bestimmte Anzahl gebaut werden sollen; wobei hier folgendes gilt: $N=N_A+N_B+N_C+N_D$ mit N_X = Anzahl einer bestimmten Variante oder eines Modells.

Aufgabe des Verfahrens

Das Optimierungsziel ist eine Autosequenz zu finden, die sowohl die *capacity constraints* als auch die *production requirements* beachtet. Weil es so viele zulässige Lösungen zu diesem Problem gibt ist eine grundlegende Schwierigkeit, alle Produktiosszenarien mit einer minimalen Platzkomplexität darzustellen. Wobei mit Produktionsszenarien hier Sequenzen von Autos gemeint sind.

In dem zugrundeliegenden Papier wird gezeigt, wie die algebraischen Eigenschaften von Petri-Netzen verwendet werden können, um alle zulässigen Lösungen dieses Problems darstellen zu können. Ein zweistufiger Lösungsweg wird beschrieben, indem zuerst die Kapazitätseinschränkungen in Betracht gezogen werden, unabhängig von den Produktionsvoraussetzungen. Anschließend werden auf der Grundlage der berechneten *capacity constraints* die *production requirements* für eine variable Anzahl von Autos modelliert.

Übersicht über Petri-Netze

Hier sollen Eigenschaften und das Verhalten von Petri-Netzen soweit vorgestellt werden, wie es für das Verständnis der Problemlösung benötigt wird.

Definition von S/T-Netzen

N = (P, T, *Pre*, *Post*)

P = Menge der Stellen
T = Menge der Transitionen

Post: $T \times P \rightarrow \mathbb{N}$ mit $(t,p) \neq 0$ ist eine Gewichtungsfunktion,die der Kante von t nach p einen Wert zuordnet. Ist der Wert für eine Kante (t,p)=0 so existiert diese Kante nicht.

Pre: P✕T $\rightarrow \mathbb{N}$ mit (p,t) $\neq 0$ ist eine Gewichtungsfunktion,die der Kante von p nach t einen Wert zuordnet. Ist der Wert für eine Kante (t,p)=0 so existiert diese Kante nicht.

Ein S/T-Netz besteht hier aus einem 4-Tupel, welches aus einer Menge von Transitionen, einer Menge von Stellen und zwei Gewichtungsfunktionen besteht, wobei die Gewichtungsfunktionen implizit die Flußrelation darstellen.
Es gibt noch andere gebräuchlichere und verständlichere Möglichkeiten S/T-Netze darzustellen. Hier sei auf entsprechende Literatur verwiesen.

Punktnotation

Zur Darstellung der Pre/Postmengen kann man geschickterweise die konventionelle Punktnotation verwenden, die Vor- und Nachbereich definiert. Sie kann Vor- und Nachbereiche sowohl für Stellen als auch für Transitionen darstellen.

$$\text{Nachbereich einer Transition}: t^{\bullet} = \{p \in P \mid (t,p) \subseteq T \times P\}$$
$$\text{Vorbereich einer Transition}: {}^{\bullet}t = \{p \in P \mid (p,t) \subseteq P \times T\}$$
$$\text{Nachbereich einer Transition } p^{\bullet} = \{t \in T \mid (p,t) \subseteq P \times T\}$$
$$\text{Vorbereich einer Transition } {}^{\bullet}p = \{t \in T \mid (t,p) \subseteq T \times P\}$$

Der Vorbereich ist eine Menge die man in einem Schritt direkt erreichen kann, d.h. für die ein Pre- oder Post-Funktionswert ungleich 0 existiert . Der Vor-/Nachbereich von Transitionen besteht nur aus Stellen und der von Stellen nur aus Transitionen.

Ein S/T-System besteht hier aus einem S/T-Netz sowie einer Anfangsmarkierung. Eine Markierung ist die Anzahl der Tokens, die eine Stelle enthält. Eine Anfangsmarkierung ist ein Spaltenvektor mit |S| Komponenten, wobei die i-te Komponente des Vektors für die Anzahl der Tokens an der Stelle i steht.

Aktivierung einer Transition

Eine Transaktion kann dann schalten, wenn sie aktiviert ist. Damit sie aktiviert ist muß folgendes gelten:

$$\forall p \in {}^{\bullet}t : Pre[p,t] \leq M(p)$$
$$\forall p \in t^{\bullet} : Post[t,p] + M(p) \leq K(p)$$

Die Stellen des Vorbereichs einer Transition müssen mindestens die Anzahl von Tokens beinhalten, die die Gewichtungsfunktion Pre den Kanten zuweist. Desweiteren muß die Kapazitätsbeschränkung der Stelle des Nachbereichs größer sein als der Wert der Post-Gewichtungsfunktion plus der aktuellen Anzahl an Tokens in der Stelle. Schaltet eine Transition, so werden so viele Tokens von den Stellen des Vorbereichs entfernt wie die Gewichtungsfunktion Pre vorgibt. Den Stellen des Nachbereiches werden so viele Tokens hinzugefügt wie die Gewichtungsfunktion Post angibt.

Inzidenzmatrix

Eine Inzidenzmatrix beschreibt wie sich die Anzahl von Markierungen ändert, wenn eine bestimmte Transition schaltet. Formale Beschreibung:

$$C \in \mathbf{Z}^{|P|\times|T|}$$

$$c_{ij} = \begin{array}{l}\text{Anzahl Markierungen, um die sich}\\ \text{beim Schalten von } t_j \text{ der Wert der von } p_i\\ \text{ändert.}\end{array}$$

Bei Inzidenzmatrizen werden die Transitionen in Spalten der Matrix abgebildet. In der i-ten Spalte sind die Änderungen auf die Stellen beschrieben, die mit der Transition t_i verbunden sind. Die Änderungen an der Anzahl der Markierungen einer Stelle i werden in der i-ten Zeile der Inzidenzmatrix abgebildet.

Erreichbarkeitsgraph

Schreibt man alle möglichen Schaltfolgen als Baum auf, so erhält man eine Erreichbarkeitsgraph. Aus diesem kann man ablesen, zu welcher Markierung man kommt wenn man bestimmte Schaltfolgen nacheinander ausführt.

Erreichbarkeitsmenge

Eine Erreichbarkeitsmenge ist eine Menge, die alle erreichbaren Markierungszustände beinhaltet. Die Erreichbarkeitsmenge kann über einen Erreichbarkeitsgraphen konstruiert werden.

Die Netzzustandsgleichung $m=m_0+C.S$ ist eine lineare Näherung an ein S/T System. Der Schaltzählvektor $S\in\mathbb{N}^{|T|}$ ist ein |T| -beschränkter Spaltenvektor indem S[t] für die Anzahl t der Schaltvorgängen steht. Ein Schaltzählvektor S kann für jeden erreichbaren Zustand $m\in RS(N,m_0)$ angegeben werden, so daß gilt $m=m_0+C.S$. (RS steht hier für die Erreichbarkeitsmenge (reachability set)).

Uns interessieren hier besonders jene T-semiflows die Elemente der Menge sind, die linear zu $\{x\in \mathbb{N}^{|T|} \mid C.x=0\wedge x\geq 0\}$ definiert sind. Ein T-semiflow schließt ein zyklisches oder sich wiederholendes Verhalten aus(z.B. eine Schaltsequenz, welche es erlaubt, von einem Zustand m zum selben Zustand m über einen Sequenz linear erreichbarer Markierungen zu kommen. Die Bedingung $\{x\in \mathbb{N}^{|T|} \mid C.x=0\wedge x\geq 0\}$ ist die Bedingung für eine echte T-Invariante.

Ein System mit der Eigenschaft $\{x\in \mathbb{N}^{|T|} \mid C.x=0\wedge x\geq 0\}$ wird als homogenes lineares diophantisches System bezeichnet. Viele Arbeiten beschäftigen sich mit der Lösung eines solchen Systems. In diesem Papier interessiert den Autor vor allem der inkrementelle Algorithmus von Evenlyne Contejean und Herve Devie. Weil der Algorithmus inkrementell ist, ist der Autor der Meinung, daß dieser Algoritmus besonders gut zur Berechnung von Petri-Netzen geeignet die CSPs modellieren.

Modellierung der capacity constraints

Darstellung von Variablen

Die i-te Stelle auf dem Förderband wird als eine Variable X_i dargestellt. Diese Variable kann in diesem Fall auf Grund des Beispiels Werte aus der Domäne {A,B,C,D} der Modelle annehmen. Um sicherzustellen, daß eine Variable genau einen Wert aus dieser Domäne annimmt, wird jeder Wert als eine eigene Transition

dargestellt. Die Stelle, die die Variable darstellt, wird mit einem Token geladen. Wird das Token aus der Stelle von einer Transition konsumiert, so hat die abgebildete Variable den Wert, den die konsumierende Transition repräsentiert. Dies bedeutet, daß an der i-Stelle auf dem Förderband das Modell steht, das von der abgefeuerten Transition dargestellt wird.

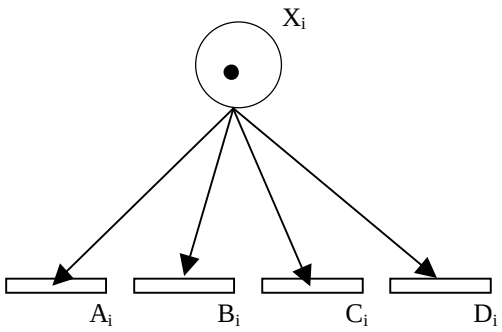

Abbildung 2. Eine S/T-Netz Darstellung einer variablen Auftragswahl

3 aus 5

Um nun aus einer möglichen Menge von 5 Schaltvorgängen genau 3 willkürlich auszuwählen, verbindet man alle 5 Transitionen mit einer Stelle und bestückt diese Stelle mit 3 Tokens. Für das Beispiel bedeutet dies nun, daß mit der eingefügten Stelle ein Constraint verbunden wird, das in diesem Fall sicherstellt, daß nur 3 Autos in einer Sequenz von 5 Autos ein Schiebedach als Ausstattungsmerkmal haben. Dies wird in Abbildung 3 illustriert.

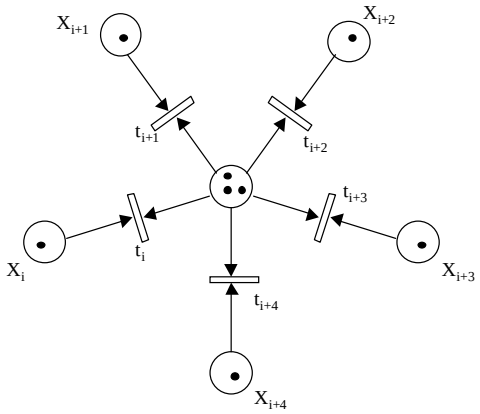

Abbildung 3: 3 aus 5

2 aus 3 in einer 5er Sequenz

Das Radio-Constraint besagt, daß aus jeder Untermenge mit 3 Autos maximal 2 Autos das Ausstattungsmerkmal Radio aufweisen dürfen. Das bedeutet, daß aus jedem willkürlich ausgewählten 3-elementigen Untertupel des 5er Tupels maximal 2 ausgewählt werden dürfen Beispiel: 5er-Tupel (12345) -> alle 3er Untertupel: (123)(234)(345). Dies wird so modelliert, daß jedes 3-elementige Untertupel mit einer einzufügenden Stelle verbunden wird. Jede dieser eingefügten Stellen wird genau mit 2 Tokens geladen, adäquat zu den Schiebedach-Constraints 3 aus 5.

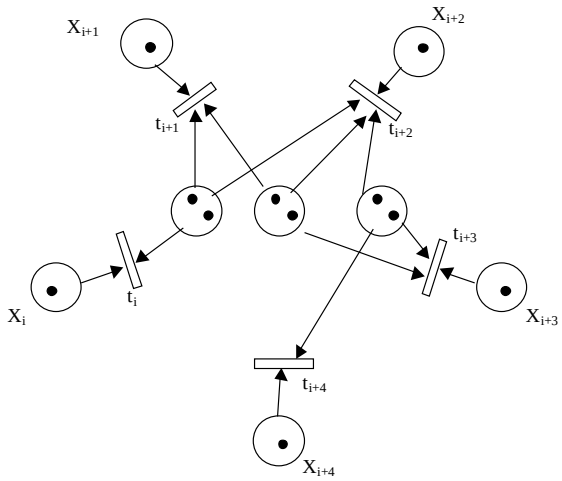

Abbildung 4: 2 aus 3 aus 5

Zusammenfügen der Constraints

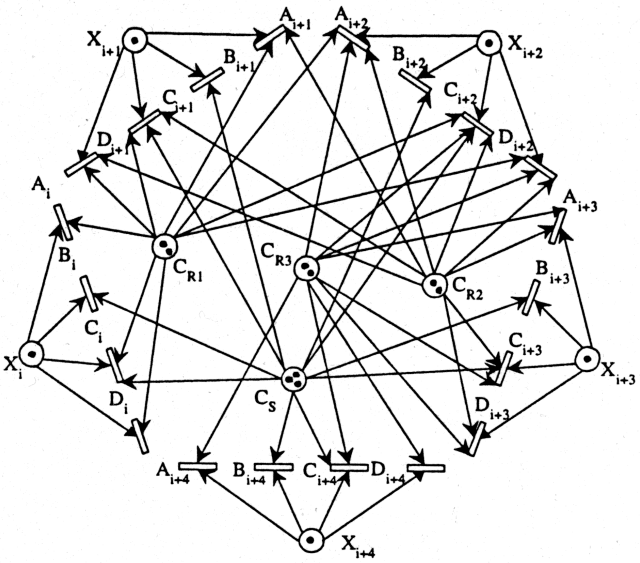

Figure 3. Modelling the capacity constraints

Abbildung 5: Gesamtmodell der Constraints

In dieses Modell werden die fünf Variablen $X_i,...,X_{i+4}$ ($i \in 1...4$) des CSPs, welche nur Werte innerhalb der Domäne {A,B,C,D} annehmen können, dargestellt. Die Constraints werden durch die Stellen C_S,C_{R1}, C_{R2} und C_{R3} abgebildet.

Die Stelle C_S stellt sicher, daß die 5 Plätze auf dem Fließband nur 3 Schiebedach-Ausstattungsmerkmale enthalten. Die Variablen X_i bis X_{i+4} sind mit den Transitionen $t \in \{B_j,C_j\}$ ($\forall j=i,..i+4$) verbunden. Damit diese Transitionen schalten können, muß gelten: $\forall C_S \in {}^\bullet m[C_S] \geqq Pre[C_S,t]$.
Die Stellen C_{R1}, C_{R2} und C_{R3} stellen das Radio-Constraint sicher, daß nur 2 von 3 Autos das Ausstattungsmerkmal Radio aufweisen dürfen. Die Stellen C_S,C_{R1}, C_{R2} und C_{R3} sind mit den Transitionen $t \in \{A_j,C_j, D_j\}$ ($\forall j=i,..i+4$) verbunden. Das bedeutet,

daß nur die Modelle A_i, C_i und D_i ein Radio benötigen. Damit diese Transitionen schalten können muß gelten: $\forall C_{Ri} \in {}^\bullet m[C_{Ri}] \geqq Pre[C_{Ri},t]_{.i=1..3}$

Damit gültige Schaltfolgen erzeugt werden können, muß noch eine Nebenbedingung eingeführt werden, die sicherstellt, daß alle Variablen belegt sind. Die Bedingung lautet:

$$\forall\ X_j \in \{X_i,..X_{i+4}\},\ m[X_j]=0$$

Eine Variable wurde gesetzt, wenn das Token in der Stelle, von der die Variable repräsentiert wird, von einer Transition konsumiert wurden. Die oben genannte Nebenbedingung stellt genau diese Eigenschaften sicher.

Eine schöne und auffällige Eigenschaft dieser Modellierung ist, daß jede erfüllbare Belegung der fünf Variablen, welche die Kapazitätsbeschränkungen berücksichtigt, in $L(N^{CC}, m_0{}^{CC})$ enthalten ist. L wird hier als Sprache des S/T-Systems bezeichnet.

Eine andere interessante Eigenschaft ist die, daß jede Sequenz von N Autos, die die Kapazitätsbeschränkung der Arbeitsbereiche erfüllt, über die k-malige Neuinitialisierung des S/T-Netzes aus Abbildung 5 erreicht werden kann, so daß gilt $kx5 \geqq N$. Dadurch ist es notwendig, daß das Netz jedesmal neuinitialisiert wird, wenn die fünf Variablen gesetzt wurden.

CMMs

Es gibt Markierungen aus der Erreichbarkeitsmenge, von denen man weiß, daß man, wenn man sie erreicht hat, keine Möglichkeit mehr hat, eine gültige Belegung, d.h. eine Sequenz von Transitionen, zu bekommen. Diese Markierungen werden CMM (critical maximum markings) genannt.
CMMs beziehen sich immer auf eine Variable. Die Tokens dieser Variablen können dann nicht mehr konsumiert werden.

Um CMMs zu bestimmen ist es notwendig, zuerst minimale Mengen zu bilden. Mit minimalen Mengen sind hier die Mengen gemeint, die den Nachbereich der Transitionen, die mit der Variable verbunden sind, bilden. In dem Beispiel in Abbildung 6 sind die minimalen Mengen {C1,C3} und {C2,C3} ({C1, C2} gehört nicht zu den minimalen Mengen, weil sie die Transition t_4 nicht abdeckt)

Die Belegungen der minimalen Mengen kann nun wie folgt berechnet werden, um ein CMM zu erhalten:

$$M[p] = \Pr e[p,t] - 1, \quad \forall t \in {}^\bullet p$$

Die Anzahl der Markierungen muß an den Stellen p um 1 kleiner sein, als die Gewichtung der Kante, die die Stelle mit der Transition verbindet. Dies muß für alle Transitionen gelten, die sich im Vorbereich der zur minimalen Menge gehörenden Stellen befinden. Für alle Stellen, die nicht zur minimalen Menge gehören, ist die Belegung egal, was durch ein x gekennzeichnet wird. Es gibt für jede Variable genau so viele CMMs wie es minimale Mengen zu einer Variablen gibt.

Die Bedingung für das Erreichen einer CMM lautet:

$\exists m_c \in M_c^{X_i} \mid m \leq m_c \Leftrightarrow X_i$ kann nicht mehr ausgewählt werden

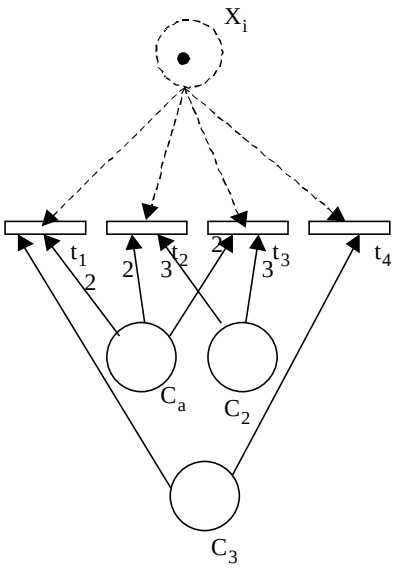

Abbildung 6: Beispiel für CMM

Um die Zeichnung noch etwas eindeutiger zu machen, wird hier noch die formale Beschreibung des Beispiel-Netzes angegeben, wobei zu beachten ist, daß X_i und die gestrichelten Kanten in der formalen Beschreibung nicht berücksichtigt werden. Es soll dadurch nur der Bezug zur Variablen X_i darstellt werden.

$$N = (X_i, C_1, C_2, C_3)$$
$$P = \{X_i, C_1, C_2, C_3\}$$
$$\Pr e = \{\ \}$$
$$Post = \begin{Bmatrix} 1 \mid (C_3, t_1), (C_3, t_4) \\ 2 \mid (C_1, t_1), (C_1, t_2), (C_1, t_3) \\ 3 \mid (C_2, t_2), (C_2, t_3) \end{Bmatrix}$$

Durch Vermeidung aller CMMs gilt folgende Eigenschaft:
Z ist CSP und S^Z seine S/T-Netz-Darstellung. Γ^Z ist die Menge der zulässigen Lösungen von Z. Wenn S^{Z*} die bereinigte Version des S/T-Netzes ist, bei der alle Schaltsequenzen, die zu einem CMM führen ausgeschlossen worden sind, dann gilt: $\Gamma^Z = L(S^{Z*})$: Das bedeutet, daß in diesem Fall die Menge der gesuchten Lösungen genau der Erreichbarkeitsmenge entspricht. Es wird somit die Nebenbedingung, daß alle Variablen belegt sein müssen, durch das Petri-Netz selbst berücksichtigt.

Vermeiden von CMMs

Um die Nebenbedingung, daß alle Variablen gesetzt sein müssen, in das S/T-Netz zu integrieren werden Stellen so hinzugefügt, daß genau solche Sequenzen nicht zugelassen werden, die zu CMMs führen.

Laut dem Autor des Artikels gibt es 3 unterschiedliche CMMs, die die 5 Variablen der capacity constraints abdecken. Diese sind: [0,0,x,x],[0,x,0,x] und [0,x,x0]. Für jedes CMM wurden die 60 Sequenzen von Transitionensschaltungen berechnet, die zu diesem CMM führen. Um diese nun zu vermeiden, werden zusätzliche Stellen eingefügt, die Pre-Kanten zu allen Transitionen der Sequenz haben die vermieden werden soll. Die eingefügten Pre-Kanten erhalten alle die Gewichtung 1. Die neue Stelle wird mit sovielen Tokens bestückt wie die Anzahl der eingefügten Kanten minus eins. Auf diese Art und Weise wird sichergestellt, daß niemals alle Transitionen der Sequenz schalten können. Dies wird in der Zeichung in Abbildung 7 verdeutlicht.

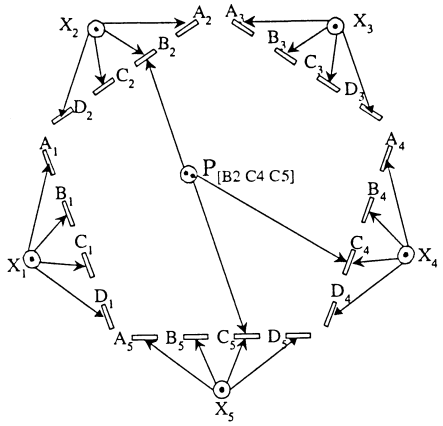

Abbildung 7: Vermeiden von Sequenzen

In Abbildung 7 wird eine Stelle eingefügt, die die Sequenz (B2, C4, C5) vermeidet. Die Sequenz würde zu dem CMM [0,x,x,0] führen. Die Bedingung für die Anfangsbelegung einer solchen Stelle lautet:

$$\sigma : \text{T - Semiflow, das vermieden werden soll}$$
$$\text{p}_\sigma : \text{Stelle, die eingefügt wird}$$
$$p_\sigma^\bullet = \{t | \sigma[t] \neq 0\} \text{und } \text{m}_0^{cc}[p_\sigma] = \sum_{t \in T^{cc}} \sigma[\text{t}] - 1$$

Um die 180 Sequenzen von Schaltungen die zu CMMs führen zu berechnen, wird für jedes CMM ein eigenes Netz modelliert das so aussieht wie das in Abbildung 8. Um sicherzustellen, daß der eingesetzte Algorithmus alle Lösungssequenzen liefert, werden zusätzliche Stellen eingefügt, die eine Art komplementäre Stelle, z.B. $\overline{C_{R1}}$ und $\overline{C_S}$, zu den Stellen bilden, die die minimale Menge darstellen. Wird über eine Transition ein Token aus einer Stelle der minimalen Menge entfernt, so wird diese in der komplementären Stelle hinzugefügt. Sind alle Tokens von den Stellen in die komplementären Stellen geflossen, so kann eine Transition t_{CMM} schalten, die die Tokens von den komplementären Stellen wieder in die normalen Stellen zurücküberführt. Die Variablen X_i bis X_{i+4} können weggelassen werden, weil ihre Eigenschaft dirket in den Algorithmus implementiert werden kann.

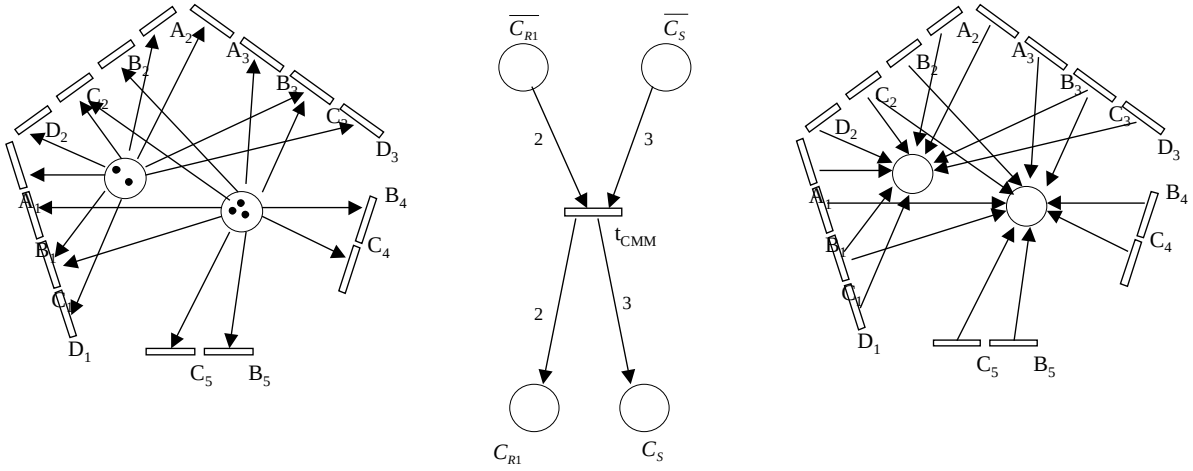

Abbildung 8: Reinitialisierung

Belegungen

Die Lösungsmenge von $L(S^{CC^*})$ wurde ausgerechnet, um alle gültigen Lösungen der *capacity constraints* darzustellen. Diese wurden in 22 Belegungen zusammengefaßt. Diese 22 Belegungen werden von Abbildung x dargestellt.

(n_A,n_B,n_C,n_D)	(n_A,n_B,n_C,n_D)	(n_A,n_B,n_C,n_D)	(n_A,n_B,n_C,n_D)	(n_A,n_B,n_C,n_D)
1:(4,1,0,0)	6:(2,2,1,0)	11:(1,3,0,1)	16:(1,1,0,3)	21:(0,1,1,3)
2:(3,2,0,0)	7:(2,2,0,1)	12:(1,2,1,1)	17:(0,3,0,2)	22:(0,1,0,4)
3:(3,1,1,0)	8:(2,1,2,0)	13:(1,2,0,2)	18:(0,2,1,2)	
4:(3,1,0,1)	9:(2,1,1,1)	14:(1,1,2,1)	19:(0,2,03,)	
5:(2,3,0,0)	10:(2,1,0,2)	15:(1,1,1,2)	20:(0,1,2,2)	

Tabelle 2: 22 mögliche Verteilungen

In diesem Beispiel steht n_A für die Anzahl der Modelle die vom Typ A sein dürfen. Die Zahlen 1 bis 22 stehen einfach für eine Nummerierung dieser 22 möglichen Belegungen. Wobei vielleicht anzumerken ist, daß es sich hier bei den Belegungen um eine mengenmäßige Gruppierung der Vorkommen der Anzahl der einzelnen Modelltypen handelt. D.h., daß es zu jeder Belegung mindestens eine gültige Sequenz von Schaltfolgen gibt, die die capacity constraints erfüllen.

Modellieren der production requirements

Bisher wurde nur eine Lösung für 5 zu produzierende Autos gegeben. Um nun auch eine Lösung für beliebig viele Autos zu erhalten wird nun ein neues S/T-Netz eingeführt, daß es ermöglicht beliebig lange Sequenzen von Autos zu entwickeln, die die *capacity constraints* und die *producition requirements* berücksichtigen.

Dazu werden die 22 Belegungen hergenommen und als Transitionen in dem neuen S/T-Netz modelliert. Es werden nun vier Stellen (P_A, P_B, P_C, P_D) eingefügt, die jeweils für die unterschiedlichen Modelle stehen. Diese vier Stellen werden nun mit Pre-Kanten mit den 22 Transitionen verbunden, wobei hier die Gewichtung der Kanten von der Wertigkeit der Belegungen abhängt.

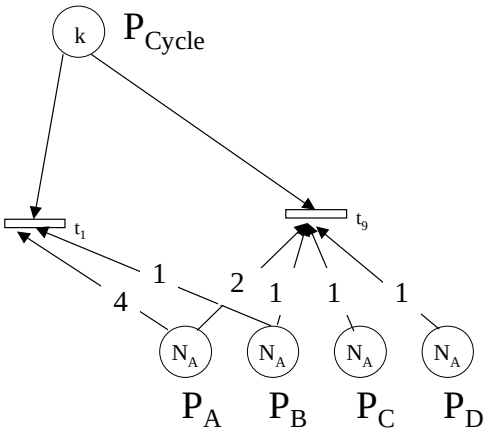

Abbildung 9: Beispiel der Modellierung der production requirements

Die Belegung 1 aus Tabelle 2 wird durch die Transition t_1 repräsentiert. Bei dieser Belegung werden vier Autos des Modelltyps A und ein Auto vom Modelltyp B hergestellt. Deswegen werden die Stellen P_A und P_B mit der Transition t_1 verbunden. Wobei die Gewichtung der Kante von P_A nach t_1 vier beträgt, weil vier Autos dieses Modelles mit dieser Belegung produziert werden. Es kann also diese Anzahl von der Anzahl der noch vom Modell A zu produzierenden Autos abgezogen werden. Die Anzahl der noch zu produzierdenden Autos vom Modell A wird durch die Anzahl der Markierungen in der Stelle P_A ausgedrückt. Gleiches gilt für die anderen Stellen und Transitionen.

Ist N die Gesamtzahl der zu produzierenden Autos, so stellt der Term $N=N_A+N_B+N_C+N_D$ die Verteilung der Gesamtanzahl auf die einzelnen Modelle dar. Die Gesamtzahl der zu produzierenden Autos kann auch durch k Zyklen angenähert werden, so daß N=5k erfüllt ist. Bei jedem Schalten einer Transition des neuen S/T-Netzes N^{PR} wird eine Sequenz ausgewählt, die genau fünf Autos festlegt. Es legt sich jetzt nahe, daß man eine zusätzliche Stelle einführt, die die k Zyklen abbildet. Dazu muß die Stelle mit k Tokens gefüllt werden und über Pre-Kanten mit der Gewichtung eins mit allen 22 Transitionen verbunden werden. k steht hier für die Anzahl der Zyklen. Somit ist sichergestellt, daß die *production requirements* erfüllt werden.

Die Beschreibung für das S/T-Netz für die production requirements lautet:

$$
\begin{aligned}
S^{PR} &= (P^{PR}, T^{PR}, \mathrm{Pr}e^{PR}, Post^{PR}, m_0^{PR}) \\
P^{PR} &= \{P_{Cycle}, P_A, P_B, P_C, P_D\} \text{mit } m_0^{PR}[P_{Cycle}] = k \text{ und } \left(m_0^{PR}[P_i] = N_i\right)_{\forall i=A\ldots D} \\
T^{PR} &= \{t_1, \ldots, t_{22}\} \text{mit } \left(\mathrm{Pr}e^{PR}[P_{Cycle}, t_i] = 1\right)_{\forall i=1\ldots 22} \\
&\quad \textit{und } \left(\mathrm{Pr}e^{PR}[P_j, t_i] = n_{i,j}\right)_{\forall i=1..22, \forall j=A..D} \\
&\quad \textit{und } \left(Post^{PR}[P,t] = 0\right)_{\forall (P,t) \in P^{PR} \times T^{PR}}
\end{aligned}
$$

Das S/T-Netz N^{PR} kann besser in formaler Schreibweise dargestellt werden als in einer Graphik, weil es 88 Kanten verteilt auf 5 Stellen und 22 Transitionen gibt. Bei einer solchen Größenordung von Transitionen kann man als Mensch nicht mehr sehr viel erkennen.

CMMs für die Production Requirements

Damit auch bei den *production requirements* sichergestellt ist, daß nur gültige Lösungen zu Stande kommen, werden hier genauso wie bei den *capacity constraints,* CMMs mittels minimaler Mengen berechnet und auf dieselbe Art und Weise modelliert, daß sie nicht auftreten können.

Ergebnis

Berechnet man das oben beschriebene Modell mit dem ebenfalls angedeuteten Algorithmus, so bekommt man die **Menge aller gültigen Lösungen** dieses konkreten Problems. Es wurde mit den Werten initialisiert:

Produktion von 40 Autos mit folgender Startbelegung :

$$m_0^{PR}[P_{Cycle}] = 8, m_0^{PR}[P_A] = 10, m_0^{PR}[P_B] = 10, m_0^{PR}[P_C] = 10, m_0^{PR}[P_D] = 10$$

Für dieses Probelm wurden 106200 T-semiflows, d.h. gültige Sequenzen von Automodellen in 171,8s berechnet.
Die Größe des Netzes bleibt bei gleichen Constraints stets konstant. Es ändert sich nur die Anzahl der Markierungen.

Qualität der Lösung

Wie mir scheint werden hier disjunkte 5er-Sequenzen berechnet, die jede für sich die *capacity constraints* erfüllen und zusammen die *production requierments* befriedigen. Reiht man nun alle 5er-Sequenzen zu einer eigenen Sequenz zusammen, so werden die capacity constraints nicht für jede beliebige Untersequenz garantiert.

Beurteilung

Entgegen meiner im Vortrag geäußerten Meinung erscheint des Verfahren, unter Berücksichtigung der neuen Tatsachen, für die Anwendungsfälle sehr brauchbar zu sein in denen es darum geht die Lösung weiter zu bearbeiten. Geht es nur darum, irgend eine gültige Lösung zu finden, so sind ihm andere Verfahren überlegen.