Optimierung von Straßennetzen mit EA

S. Benkart

Fakultät Informatik, Universität Stuttgart
Breitwiesenstraße 20-22, 70565 Stuttgart

e-mail: benkarsa@rupert.informatik.uni-stuttgart.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung 3

2. Bewertung von Straßennetzen 4

3. Evolutionäre Optimierungsstrategien 6

3.1 BOLTZMANNSTRATEGIE 6
3.2 DARWINSTRATEGIE 8
3.3 BOLTZMANN-DARWIN-STRATEGIE 8

4. Optimierung von Straßennetzen 10

5. Zusammenfassung 13

6. Literatur 14

1. Einführung

Die Optimierung von Netzwerken ist von allgemeinem Interessen in vielen verschiedenen Gebieten wie der Elektrotechnik, der Telekommunikation, der Straßenkonstruktion und der Logistik. Ein Netzwerk verbindet eine gegebene Anzahl an Knoten mittels Kanten. Bei der Optimierung eines Netzwerkes werden die Kanten verändert ohne die Knoten anzutasten, so daß ein Netzwerk höherer Qualität, welche durch eine Bewertungsfunktion bestimmt wird, entsteht. Dieses Problem ist eine Herausforderung für praktische Anwendungen als auch für die Forschung. Als ein Beispiel wird hier ein Straßennetz betrachtet, wobei jedoch die Optimierungsmethoden als auch die Ergebnisse bei ähnlichen Netzwerkproblemen angewendet werden können.
Die Optimierung eines Straßennetzes muß folgende zwei Anforderungen erfüllen:

- Minimierung der Konstruktions- und Wartungskosten, welche proportional zu der Gesamtlänge des Straßennetzes sind.
- Minimierung des Aufwandes um einen gegebenen Knoten von einem anderen Knoten zu erreichen. Die Minimierung soll für alle Knotenpaare des Graphen ausgeführt werden. Dieser Aufwand wird als Umweg bezeichnet, welcher als Differenz der Länge des bestehenden Weges zwischen zwei Knoten und der direkten Verbindung definiert ist.

Beide Anforderungen können nicht vollständig zur selben Zeit befriedigt werden, da um minimale Straßennetzkosten zu erreichen die kürzest mögliche Verbindung zwischen allen gegebenen Knoten benötigt wird, und die Minimierung des Umweges eine direkte Verbindung zwischen allen Knoten bedeutet und dabei eine maximale Straßennetzlänge erreicht wird.
Diese Sicht vernachlässigt alle Probleme die bei der Benutzung von Straßen auftreten, wie die Verkehrsdichte oder die Flußkapazität. Hier wird ein Augenmerk auf die Optimierung der Verbindungen bestehender Knoten gelegt. Die Bewertungsfunktion betrachtet hierbei nur die Länge des Straßennetzes und nicht die Straßenbreite oder die Ausstattung, und „Umweg“ bezeichnet nur die Reisestrecke, nicht die Reisezeit oder die Reisegeschwindigkeit.
Betrachtet man nur die erste Anforderung, so ist die Lösung des Optimierungsprozesses ein Straßennetz, bei dem jeder Knoten nur eine Verbindung zu einem anderen Knoten im Straßennetz besitzt, welcher der naheliegenste Knoten ist und somit die Verbindung die kürzeste zu einem anderen Knoten im Straßennetzwerk darstellt. Dieses Straßennetz wird durch den minimalen Spannbaum dargestellt. Wird nur die zweite Anforderung betrachtet, so ist die Lösung ein Netzwerk, bei welchem jeder Knoten mit allen anderen Knoten des Graphen verbunden ist, welches durch einen vollständigen Graphen beschrieben wird. Verglichen mit diesen zwei Grenzfällen ist das Straßennetz in den meisten realen Anwendungen ein Kompromiß zwischen diesen beiden Anforderungen.
Optimierungsprobleme wie dieses werden als *frustrierende Probleme* in der Statischen Physik oder als *multiobjektive Probleme* in der Optimierungstheorie bezeichnet. Multiobjektive Optimierungsprobleme sind charakterisiert durch eine hohe Anzahl an Lösungen, welche während der Ausführung der Optimierungsfunktion gefunden werden. Um die pareto-optimale Lösungen zu finden können Evolutionäre Algorithmen verwendet werden. Diese Algorithmen arbeiten mit stochastischen Suchstrategien, durch welche die einzelnen Sucher gesteuert werden. Die Sucher bewegen sich durch die Landschaft, die durch die Bewertungsfunktion dargestellt wird.
In diesem Dokument wird eine spezielle Klasse von Evolutionären Strategien beschrieben, die Boltzmann- und die Darwinstrategie als auch eine Kombination beider. Die im Folgenden vorgestellten Evolutionären Strategien wurden bereits bei einigen komplexen Optimierungsproblemen erfolgreich angewendet.

2. Bewertung von Straßennetzen

Um Evolutionäre Strategien zur Optimierung von Straßennetzen anzuwenden, muß zuerst eine Fitneßfunktion definiert werden, mit welcher gegebene Straßennetze bewertet werden können. Betrachtet man eine Menge von Knoten $p_1 \ldots p_N$, die durch Kanten miteinander verbunden sind. Diese Kanten repräsentieren die einzelnen Straßen des Straßennetzes. Der Suchraum wird definiert durch die Menge aller möglichen Graphen g um die Knoten zu verbinden. Die Mächtigkeit der Menge aller Graphen g beträgt $2^{N(N-1)/2}$. Jeder Graph wird gemäß der folgenden Fitneßfunktion bewertet:

$$F(g,\lambda) = (1-\lambda)D(g) + \lambda C(g) \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

D(g) ist die Summe der Umwege um die verschiedenen Knoten des Straßennetzes zu erreichen und C(g) sind die Kosten für Konstruktion und Wartung des Straßennetzes, welche proportional zu der Länge des Straßennetzes sind.

Um die Bewertungsfunktion F(g) zu minimieren, muß sowohl die Funktion D(g) als auch die Funktion C(g) minimiert werden. Die Anforderung der kürzesten Verbindung zwischen zwei Knoten ist ein lokaler Constraint. Folglich wird der Mittelwert der Umwege aller Knotenpaare als lokaler Durchschnitts-Constraint bezeichnet, wogegen die Anforderung einer minimalen Gesamtlänge des Straßennetzes ein globaler Constraint darstellt. Bei dem betrachteten Beispiel eines Straßennetzes repräsentieren die lokalen Constraints die Interessen der Benutzer, welche möglichst wenige Umwege in Kauf nehmen wollen, und die globalen Constraints repräsentieren die Interessen der Betreiber, die für die entstehenden Kosten der Konstruktion und Wartung aufkommen müssen und sie somit zu minimieren versuchen.

Der Parameter λ gewichtet die zwei konkurrierenden Anforderungen. $\lambda \to 0$ führt zu einer Bewertungsfunktion welche die Umwege zwischen den Knoten optimiert ohne die Konstruktions- und Wartungskosten zu beachten und führt zu einem vollständigen Graphen. In diesem Fall ist jedes Knotenpaar durch die kürzeste Verbindung miteinander verbunden, welche gleich dem geometrischen Abstand ist. Die Gesamtlänge des Straßennetzes erreicht hierbei die maximale Länge.

Im Gegegensatz hierzu gilt für $\lambda \to 1$, daß hierbei nur die Kosten für das Straßennetz minimiert werden, was letztlich zum minimalen Spannbaum führt. Dies hat sehr lange Verbindungen zwischen zwei nicht direkt miteinander verbundenen Knoten zur Folge. Dadurch muß ein großer Umweg in Kauf genommen werden, der wesentlich größer als die direkte Verbindung, dem arithmetischen Abstand, ist. Weiter bedeutet dies, daß dieser Graph leicht kollabiert, da jeder Knoten nur eine Verbindung zum Graph hat. Der hierbei betrachtete Graph unterscheided sich vom Steiner-Baum, da davon ausgegeangen wird, daß jede Verbindung eine direkte Verbindung zwischen zwei Knoten ist, ohne daß weitere Knoten konstruiert werden müssen um die gegebenen Knoten miteinander zu verbinden. Das Verhältnis zwischen der Länge eines Steiner-Baums und eines minimalen Spannbaums beträgt immer $\ge \sqrt{\frac{3}{2}}$ (Gilbert & Pollack, 1968; Winter, 1987).

Bei praxisrelevanten Anwendungen sind die beiden Grenzwerte $\lambda = \{0,1\}$ nur unter bestimmten Umständen relevant. Ein minimaler Spannbaum ist geeignet, wenn die teilweise sehr langen Verbindungen sehr einfach bewältigt werden können. Hier zählt die Zeit, die zum Erreichen eines

Knoten notwendig ist nicht und ein Umweg kann problemlos akzeptiert werden. Ein vollständiger Graph als Netzwerk ist geeignet, wenn die Kosten für die Erstellung nichtig sind im Gegensatz zu den Laufzeiten, welche so kurz wie möglich sein sollten. Bei Straßennetzen sollte sich λ von 0 und 1 unterscheiden.
Im folgenden wird der vollständige Graph ($\lambda = 0$) als Referenz herangezogen, welcher durch g^* bezeichnet wird. Der vollständige Graph hat den Vorteil, daß sowohl die Straßenlänge als auch die Kosten für Konstruktion und Wartung bekannt sind. Die Gesamtlänge des Straßennetzes beträgt die Summe aller arithmetischer Abstände l_{ij} zwischen den einzelnen Knoten und hat die maximale Länge L^*:

$$L^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} l_{ij}$$

x_i und y_i stellen hierbei die zweidimensionalen Koordinaten des Knoten i dar. Für $0 \le \lambda \le 1$ ist der Umweg D(g) der Verbindungslänge zweier Knoten gegenüber der direkten Verbindungslänge gegeben durch

$$D(g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} h_{ij} - l_{ij} \qquad D(g^*) = 0$$

h_{ij} ist die kürzeste Verbindung der Knoten i und j des gegebenen Graphen. Offensichtlich ist $D(g^*)$ gleich Null, da $h_{ij} = l_{ij}$ gilt.
D(g) kann normalisiert werden durch die Gesamtlänge des vollständigen Graphen.

$$d(g) = \frac{D(g)}{L^*} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{h_{ij} - l_{ij}}{L^*}$$

Eine andere Möglichkeit, die von Schaur (1991, S.82) vorgeschlagen wurde, lautet

$$d_2(g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{h_{ij} - l_{ij}}{l_{ij}}$$

Hierbei fallen Umwege bei kurzen Distanzen mehr ins Gewicht als bei größeren. Im Folgenden wird die Gleichung d(g) herangezogen.
Die Kosten C(g) sind proportional zu der Gesamtlänge des Straßennetzes, woraus folgt:

$$C(g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\vartheta_{ij} l_{ij}$$

ϑ_{ij} drückt hierbei aus, ob eine direkte Verbindung zwischen dem Knoten i und j besteht. Besteht eine direkte Verbindung, so ist $\vartheta_{ij} = 1$, sonst ist $\vartheta_{ij} = 0$. Nach der Normalisierung von C(g) lautet die Gleichung

$$c(g) = \frac{C(g)}{L^*} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\vartheta_{ij} l_{ij}}{L^*}$$

Die Bewertungsfunktion , welche die Güte des Straßennetzes beschreibt, ist nun durch folgende Gleichung gegeben

$$f(g,\lambda) = \frac{F(g)}{L^*} = \frac{1}{2L^*}\sum_{i,j=1}^{N}[(1-\lambda)(h_{i,j} - l_{i,j}) + \lambda\vartheta_{ij} l_{ij}]$$

Für den vollständigen Graphen gilt, daß der Umweg $d(g^*) = d_{min} = 0$ ist und die Kosten $c(g^*) = c_{max} = 1$ sind. Daraus folgt für die Bewertungsfunktion, daß $f(g^*,\lambda) = \lambda$ ist. Durch die gegebene Bewertungsfunktion wird ein Straßennetz durch die Gewichtung der Faktoren Umweg d(g) und Kosten c(g) (entspricht der Gesamtlänge des Straßennetzes) entsprechend bewertet.

3. Evolutionäre Optimierungsstrategien

Die Idee, Optimierungsprobleme durch evolutionäre Prinzipien zu lösen ist nicht neu, doch erst mit dem Eintritt in das Computerzeitalter begann ihre stürmische Entfaltung. Besonders stark entwickelten sich in den letzten Jahren die zahlreichen Lösungsansätze, die heute unter dem Begriff Evolutionäre Algorithmen zusammenfassen: das Simulated Annealing, die Evolutionsstrategien (ES), Genetische Algorithmen (GA), Evolutionäre Programmierung (EP) und die Genetische Programmierung (GP).
Es scheint so, als würde die Vielfalt der Realisierungen Evolutionärer Algorithmen eine einheitliche Darstellung nicht zulassen. Alle Evolutionären Algorithmen besitzen jedoch zwei fundamentale Charakteristika, welche die Dynamik ihrer Optimierung beschreiben. Betrachtet man diese Dynamik als eine Bewegung x(t) in einem Suchraum X, die alle globalen Optima einer Funktion F(x) auf X besuchen soll, so kann man feststellen:

- Die Bewegung x(t) ist nicht deterministisch, sondern es werden Möglichkeiten des Fortschreitens erzeugt. Die Entscheidung für eine von diesen erfolgt dann durch Bewertung an Hand von F(x). Alle Evolutionären Algorithmen realisieren also die Prozesse der Möglichkeitserzeugung – die Mutation – und -bewertung – die Selektion.
- Ein System ist durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung p(x) seines Zustandes x gegeben. Für ein Ensemble oder eine Population von Suchern charakterisiert p(x, t) die Dichte der Sucher im Zustand x zur Zeit t oder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Suchers im Zeitverlauf. Ein und dieselbe Dynamik der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch unterschiedliche Algorithmen realisiert werden. Deshalb wird die Klasse aller Evolutionären Algorithmen der gleichen Dynamik eine Evolutionäre Strategie genannt.

Unter einem Optimierungsproblem wird die Bestimmung der Optima (Minima, Maxima) einer reelwertigen Funktion $F : X \to \Re$ - der Fitness – in einem Suchraum X verstanden.
Betrachtet wird eine Anzahl von Zuständen i=1,...,v im Suchraum X, welche durch die Fitneß F_i charakterisiert sind. Weiter werden N Sucher angenommen, welche das Minimum im Suchraum X versuchen zu finden. Dann gibt $N_i(t)$ die Anzahl der Sucher an, welche den Zustand i zur Zeit t besetzen. Die Anzahl der Sucher wird hier als ganze Zahl dargestellt. Strebt $N \to \infty$ dann sollte die Anzahl der Sucher durch die Wahrscheinlichkeit $p_i(t)$ widergespiegelt werden. $p_i(t)$ beschreibt somit die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit t die Sucher den Zustand i besetzen.
Der Optimierungsprozeß hat sicherzustellen, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Sucher im Minimum des Suchraums X während der Suche wächst. Jedoch besitzt der Suchraum X eine große Anzahl lokaler Minima, welche von den Suchern überwunden werden müssen um das globale Minimum zu finden. Der Optimierungsalgorithmus hat somit sicherzustellen, daß die lokalen Minima von den Suchern durchlaufen werden können.

3.1 Boltzmannstrategie

Die Boltzmannstrategie ist eine der einfachsten Varianten einer Evolutionären Strategie. Im Jahre 1953 wurde von METROPOLIS et al. ein Algorithmus zur Erzeugung Boltzmannverteilter Ensemble entwickelt. Der Metropolisalgorithmus wurde 1983 durch KIRCKPATRICK et al. um die Idee des sukzessiven Abkühlens zum Simulated Annealing erweitert, das in der Folgezeit zahlreiche Anwendungen bei verschiedensten Optimierungsprobleme gefunden hat. Der Algorithmus besitzt als stationäre Verteilung die Bolzmannverteilung

$$P(x) = \lim_{t\to\infty} P(x,t) \sim e^{-\beta F(x)},$$

weshalb Algorithmen mit solch einem Verhalten nach EBELING Boltzmannstrategien genannt werden.

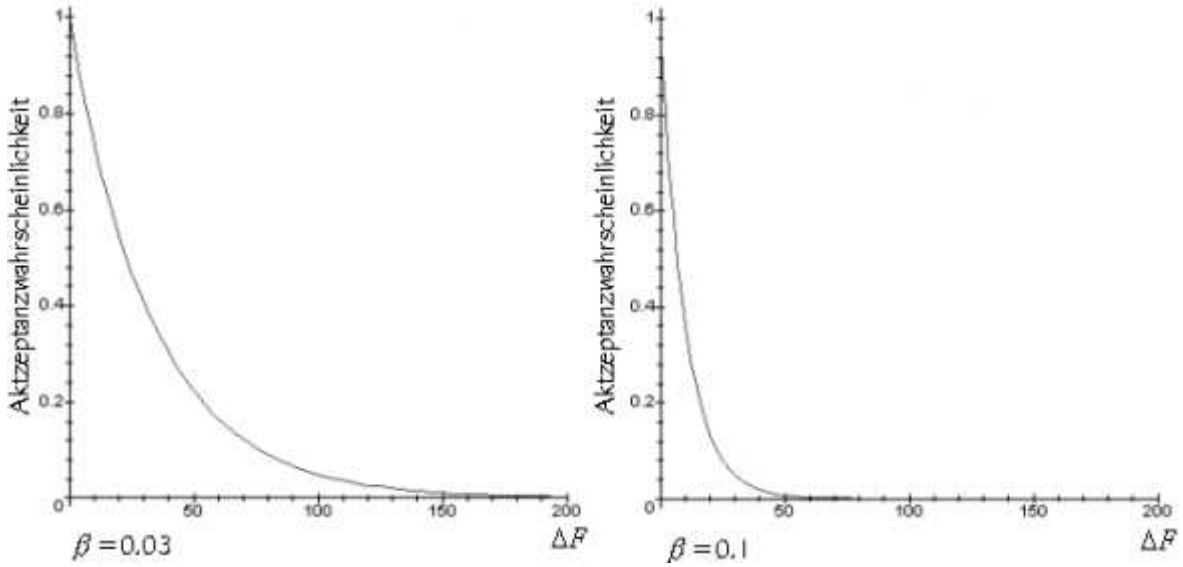
Eine Dynamik welche das Minimum innerhalb des diskreten Suchraums X findet ist gegeben durch

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{i \neq j} A_{ij} p_j(t) - A_{ji} p_i(t)$$

Die Boltzmannstrategie wird durch einen einzelnen Sucher realisiert und benutzt somit keinerlei Informationen vergangener Optimierungsschritte. Um einen Optimierungsschritt zu vollziehen, wird zunächst sein Zustand j im Suchraum X durch eine Mutation in einen neuen Zustand i überführt. Die Bewertung dieser Mutation erfolgt durch die Fitneß mit der Akzeptanzwahrscheinlichkeit

$$A_{ij} = A_{ij}^0 * \begin{cases} 1 & : F_i < F_j \\ e^{-\beta(F_i - F_j)} & : F_i \geq F_j \end{cases}$$

Dies bedeutet, daß Mutationen, die zur Verbesserung der Fitneß führen (Minimierung) immer vollzogen werden, verschlechternde Mutationen jedoch nur mit einer Wahrscheinlichkeit $e^{-\beta(F_i - F_j)}$. Eine Verschlechterung zu akzeptieren ist selbst keine schlechte Strategie. Sie ermöglicht die Passage lokaler Minima. Um dies zu erreichen, muß die Akzeptanzrate abhängig von der Größe der Verschlechterung sein. Kleine Verschlechterungen können häufiger toleriert werden als große, d.h., die Akzeptanzrate sollte mit der Größe der Fitneßdifferenz fallen.
Der einzige Parameter des Algorithmus β bestimmt die Nichtakzeptanz der verschlechternden Mutationen. Der Parameter β ist definiert durch $\frac{1}{T(t)}$. Die Funktion T(t) entspricht in Anlehnung an die Physik einer Abkühlungskurve und fällt somit monoton bei fortschreitendem Optimierungsprozeß. Kleines β (hohe Temperatur) bewirkt eine hohe Akzeptanz – der Weg des Suchers entspricht einer Zufallsbewegung. Hingegen führt ein großes β (geringe Temperatur) zu einer geringen Akzeptanz – der Sucher beschreibt einen stochastischen Gradientenabstieg.



Aktzeptanzwahrscheinlichkeit *für β =0.03 (links) und β =0.1 (rechts). Kleinere β bewirken eine höhere Akzeptanzwhrscheinlichkeit, größere β bewirken eine geringere Akzeptanzwahrscheinlichkeit.*

Der Faktor A_{ij}^0 ist symmetrisch und definiert mögliche Zustände i, die vom Zustand j erreicht werden können. Ein mögliche Definition lautet:

$$A_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \textit{wenn i adjazent zu j ist} \\ 0 & \textit{wenn i nicht adjazent zu j ist} \end{cases}$$

Ein Zustand i ist adjazent zu einem Zustand j, wenn der Zustand i durch eine einfache Mutation des Zustands j, d.h. durch Verändern eines Merkmals des Zustands j, erreicht werden kann. Es sind auch andere Definitionen für A_{ij}^0 möglich.

3.2 Darwinstrategie

Die Darwinstrategie beschreibt als stark vereinfachtes Modell die prinzipielle Fähigkeit der biologischen Evolution zur optimierenden Entwicklung. Da ein Optimierungsproblem gelöst werden soll wird im folgenden die Fähigkeit einer Strategie betrachtet, die Optima einer gegebenen Fitneßfunktion in beliebigen Suchräumen findet. Genau diesem Ziel trägt die Darwinstrategie als Beschreibung spezieller evolutionärer Systeme Rechnung.
Ein solches System stellt das Fisher-Eigen-Modell der Entwicklung einer einzelnen Spezies in einer festen Umgebung dar. Erstmals durch FISCHER 1930 untersucht, wurde es von EIGEN und SCHUSTER als Standardmodell für Systeme mit Konkurrenz und Selektion formuliert. Kennzeichnend für das Fisher-Eigen Modell sind eine fitneßproportionale Reproduktion der Individuen und ihre Selektion durch begrenzte Ressourcen. Ein solches System kann durch eine Dynamik mit fitneßabhängigen Wachstumsraten und konstanter Populationsgrößen beschrieben werden. Optimierungsstrategien, die dies erfüllen, werden als nach EBELING als Darwinstrategien bezeichnet.
Alle biologisch motivierten Evolutionären Algorithmen wie die Evolutionsstrategien Rechenbergs, die Genetischen Algorithmen von Holland, die Varianten der Evolutionären Programmierung und die Genetische Programmierung realisieren prinzipiell eine Darwinstrategie durch ihre Selektionschemata.

Die Darwinstrategie setzt als eigentliche evolutionäre Strategie im Gegensatz zur Boltzmannstrategie eine Population $\wp = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ von N Individuen voraus. Jedes Individuum ist durch seinen Zustand $i \in X$ im Suchraum gekennzeichnet. Der Zustand beschreibt eine mögliche Lösung des gegebenen Optimierungsproblems, wobei die Qualität der Lösung durch die Fitneßfunktion $F : X \to \Re$ definiert ist. Die Optimierungsaufgabe soll ein Minimierungsproblem sein, d.h. es werden Zustände kleinster Fitneß gesucht.
Die Population bestehend aus N Suchern wird in m Subpopulationen eingeteilt. Individuen mit der selben Fitneß gehören zu ein und der selben Subpopulation $s_i = N_i/N$ (i = 1...m) welche durch einen zur Fitneß proportionalen Wert E_i charakterisiert ist. Der Durchschnitt $\langle E \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle E \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_i s_i(t); \qquad 1 = \sum_{i=1}^{m} s_i(t)$$

Die Dynamik der Subpopulationen ist gegeben durch

$$\frac{ds_i}{dt} = \underbrace{(E_i - \langle E \rangle) s_i}_{Gradientenabstieg} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \left[A_{ij}^D s_j - A_{ji}^D s_i \right]}_{Sprünge}$$

Diese Dynamik wird als Fisher-Eigen-Dynamik bezeichnet. Die symmetrische Matrix A_{ij}^D beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Annahme von Individuen, die schlechter sind als die durchschnittliche Fitneß der Population. Die Wahrscheinlichkeit der Annahme von Verschlechterungen sinkt beim Fortschreiten des Algorithmus. Hierdurch wird erreicht, daß der Gradientenabstieg an Bedeutung gewinnt und die Sucher sich auf ein Minima zubewegen.

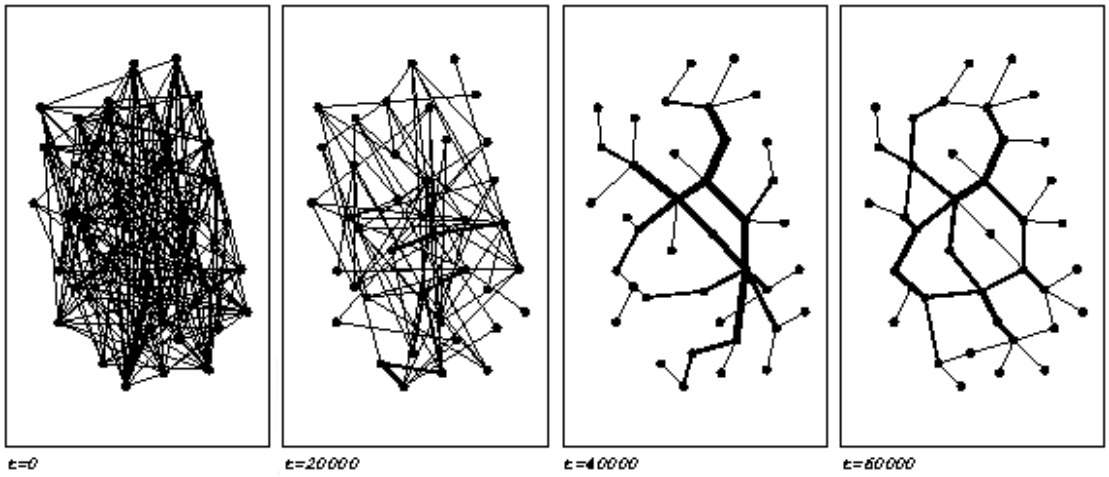
3.3 Boltzmann-Darwin-Strategie

Die Boltzmannstrategie ist in der Lage in zerklüfteten Optimierungslandschaften potentielle Minima zu finden, solange die lokalen Minima nicht durch zu hohe Barrieren von einander getrennt sind. Die Darwin-Strategie kann hohe Barrieren überwinden, wenn die nächsten Minima dicht beieinander liegen. Um die Vorteile der Boltzmannstrategie als auch der Darwinstrategie zu nutzen wurde die

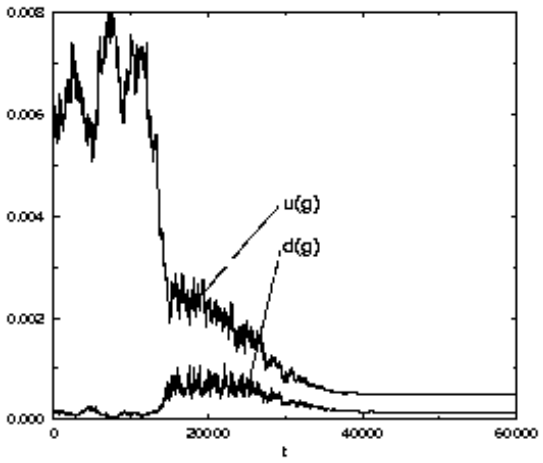
beiden Strategien kombiniert. Die Boltzmann-Darwin-Strategie soll hier nicht weiter erläutert werden, sondern wird im Folgenden nur zum Vergleich herangezogen.

4. Optimierung von Straßennetzen

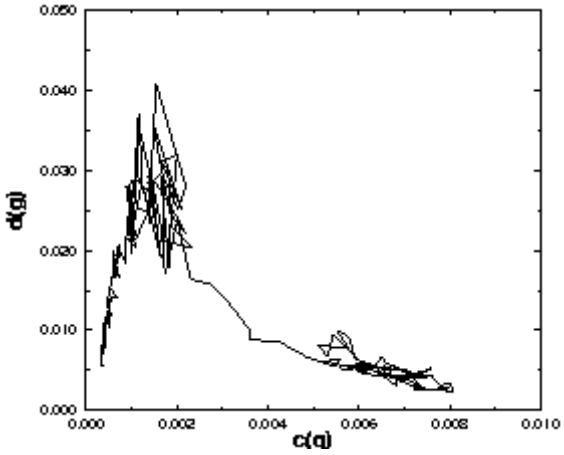
Das folgende Beispiel einer Optimierung eines Straßennetzes, bestehend aus 39 Knoten, zeigt die Verwendung der zuvor beschriebenen Evolutionären Strategien.
Zu Beginn wird ein vollständiger Graph zur Optimierung herangezogen (t=0). Dies ist nicht notwendig, da $\lambda \neq 0$ gewählt wurde und somit der vollständige Graph keine optimale Lösung dieses Problems sein kann. Aus diesem Grund kann die Optimierung mit einem beliebigen Graph begonnen werden. Der Graph wird bei jedem Optimierungsschritt mutiert durch Einfügen, Löschen oder Austauschen einer Verbindung und dem anschließenden Bewerten durch die beschriebene Fitneßfunktion.



Die Abbildung zeigt die Optimierung des Straßennetzes nach 0, 20000, 40000 und 60000 Optimierungsschritten für $\lambda = 0{,}975$. Die Abkühlung ist definiert durch $T(t+1) = \frac{T_0}{(1+at)}$, wobei Temperatur zu Beginn T_0=0,01 und die Abkühlungskonstante a=0,002 ist. Die Linienstärke einer Verbindung gibt an, wie oft eine Verbindung für die kürzeste Verbindung zweier Knoten herangezogen wurde.
Wird ein dichter Graph optimiert, so geschieht dies in zwei Phasen. Während der ersten Phase werden Verbindungen zwischen den Knoten gelöscht, der Graph wird ausgedünnt. In der zweiten Phase, die wesentlich länger als die erste ist, wird der Graph entsprechend der vorgegebenen Fitneßfunktion gewichtet. Die Länge der zweiten Phase ist abhängig vom Faktor λ. Für $\lambda \to 0$ spielt die erste Phase kaum eine Rolle, da die Kosten für Konstruktion und Wartung vernachlässigt werden. Aus diesem Grund ist die erste Phase entsprechend kurz.
Die zwei beschriebenen Phasen der Optimierung sind typisch für dichte Graphen, da die Bewertung besser wird durch das Entfernung von Verbindungen als durch Austauschen. Wenn jedoch bereits ein ausgedünnter Graph vorliegt, werden Verbindungen zum Graph hinzugefügt oder ausgetauscht um eine bessere Qualität zu erhalten.

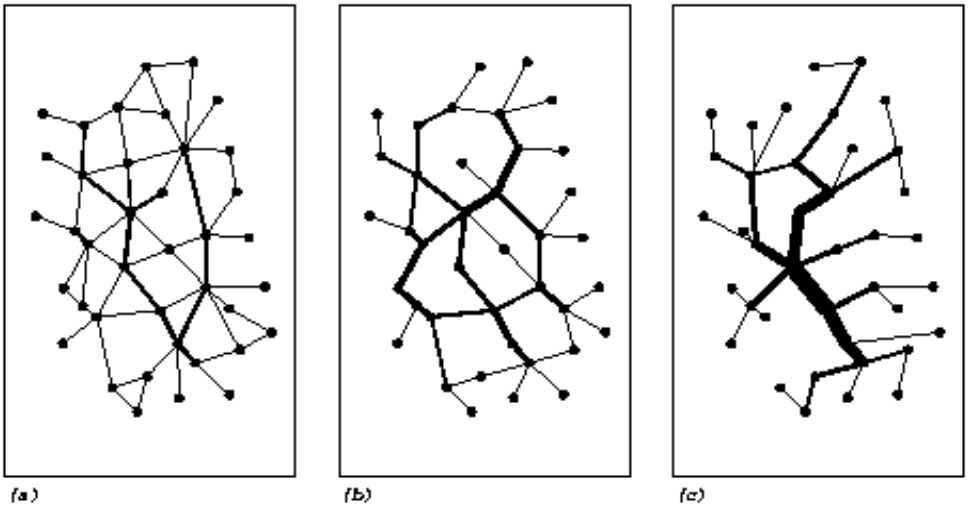


Die erste Phase ist gekennzeichnet durch größere Veränderungen in der Qualität des Graphen und beinah konstanten Wert des Umweges. Die zweite Phase startet mit einer starken Verbesserung der Fitneß und einem Anstieg des Umweges. Der Anstieg des Umweges wird in einem längeren Prozeß des Mitteln zwischen Kosten und Umweg des Graphen reduziert.

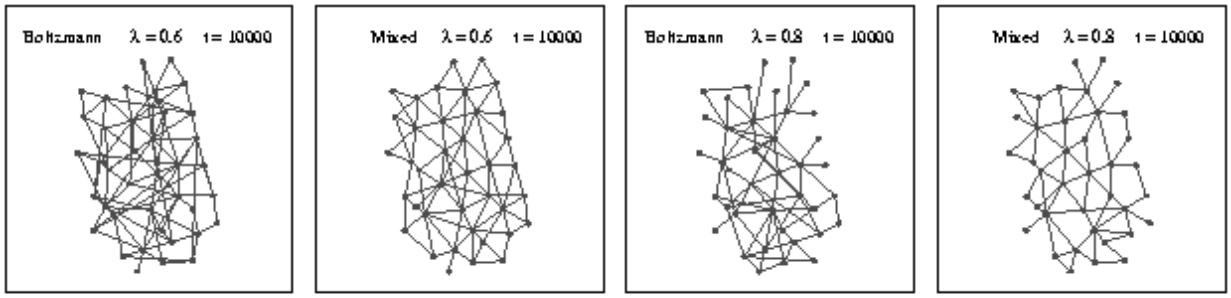


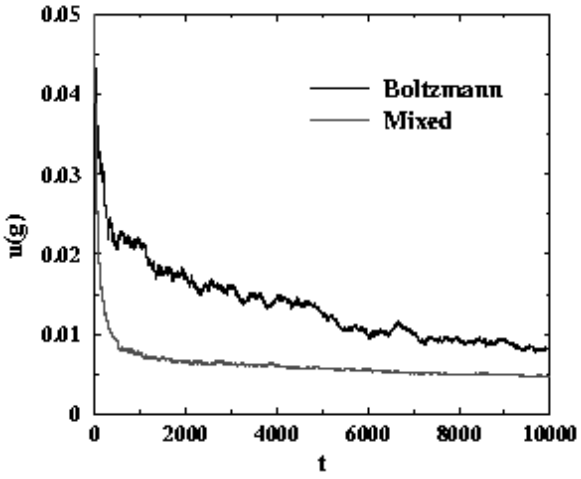
Die nebenstehende Abbildung zeigt das Verhältnis der Kosten zu dem Umweg. Die Kurve beginnt rechts unten und endet links unten. Die erste Phase ist gekennzeichnet durch eine starke Verminderung der Kostenfunktion und mäßiger Änderungen der Umwegfunktion. Die zweite Phase beginnt mit einem starken Anstieg der Umwegfunktion und erreicht hierbei die größte Auslenkung der Kurve. Während der zweiten Phase ist ein langsames Abfallen der Fitneß der einzelnen Individuen zu erkennen.

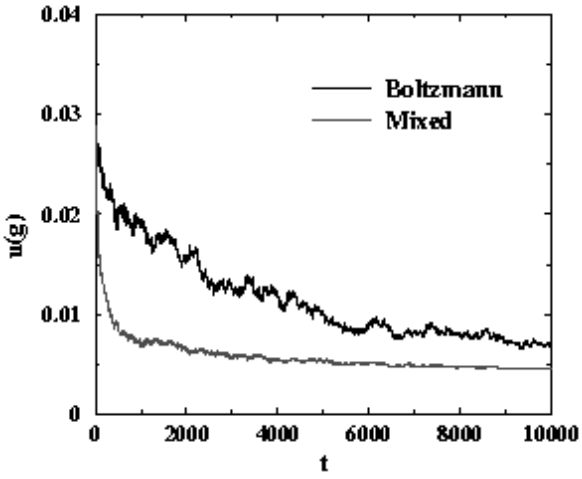
In der zweiten Phase der Optimierung werden die Verbindungen optimiert, wogegen die Kosten kaum noch variieren. Dies bedeutet, daß in der ersten Phase globale Constraints und in der zweiten Phase die lokalen Constraints beachtet werden.
Die Lösung ist abhängig von dem Parameter λ, welcher die Anzahl der Verbindungen des Graphen bestimmt. Die folgende Abbildung zeigt verschiedene Lösungen des selben Graphen nach 60000 Optimierungsschritten, wobei für den Parameter λ die Werte (a) $\lambda = 0{,}900$, (b) $\lambda = 0.975$ und (c) $\lambda = 0{,}990$ verwendet wurden.



Es ist zu erkennen, daß für kleine Werte für λ ein Graph entsteht, bei dem nahezu alle Knoten miteinander verbunden sind. Für große Werte für λ nähert sich der Graph dem minimalen Spannbaum.
Nun soll die Boltzmannstrategie mit der Boltzmann-Darwin-Strategie verglichen werden. Wie in den vorherigen Abbildungen gezeigt, benötigt die Boltzmannstrategie etwa 60000 Optimierungsschritte um eine gute Lösung zu finden. Die Boltzmann-Darwin-Strategie erreicht diese Lösungsqualität in wesentlich kürzerer Zeit.







5. Zusammenfassung

Die Optimierung muß sowohl die Verbindungslänge der einzelnen Knoten als auch die Gesamtlänge des Straßennetzes betrachten. Die Lösung dieses Problems liegt nun in einem Kompromiß zwischen diesen konkurrierenden Anforderungen. Sowohl Boltzmannstrategien, Darwinstartegien als auch Boltzmann-Darwin-Strategien optimieren den Graph in zwei Phasen. In der ersten Phase werden die Kosten minimiert und in der zweiten Phase werden die Verbindungswege optimiert. Boltzmann-Darwin-Strategien optimieren hierbei in einer kürzeren Zeit als Boltzmannstrategien, was darauf zurückzuführen ist, daß hierbei die Vorteile der Darwin- als auch die der Bolzmannstrategie Verwendung finden.
Der hier aufgeführte Vergleich kann nicht nachvollzogen werden, da keine genaue Angaben zur Testumgebung gemacht wurden. Weiter ist der Vergleich nicht aussagekräftig, da nur 10000 Optimierungsschritte ausgeführt wurden. Interessant wäre ein Vergleich, bei dem die Laufzeiten variiert werden würden. Es ist auch nicht zu erkennen, wie gut eine Lösung ist, da keine Referenz besteht, also das Ergebnis eines sehr guten Graphens nicht bekannt ist.
Der hier vorgestellte Algorithmus spielt in dieser Form keine Rolle für die Praxis. Durch die Vereinfachungen wurden zu viele Aspekte, die in der Praxis relevant sind, ausgeschlossen. Von Interesse wären das einbeziehen von bereits bestehenden Straßen oder das beachten topologischer Karten. Weiter erfolgt keine Gewichtung der Knoten, so daß alle Knoten gleiche Bedeutung haben und von einer Gleichverteilung ausgegangen wird. Der vorgestellte Lösungsansatz würde sich sicherlich an die beschriebenen und an weitere Anforderungen anpassen lassen, nur besteht hierbei das Problem, daß die Laufzeit des Algorithmus sehr stark ansteigt.

6. Literatur

- Optimization of road networks using evolutionary strategies
  Helge Rose
  Frank Schweitzer (eMail)
  Werner Ebeling
  Olaf Weiss
- Evolutionäre Strategien
- Von Boltzmann und Darwin zum Self Annealing – Strategien evolutionärer Optimierung
  Helge Rose
- Network optimization using evolutionary strategies
  Helge Rose
  Frank Schweitzer
  Werner Ebeling
  Olaf Weiss
- Evolutionary strategies for solving frustrated problems
  Werner Ebeling
  Helge Rose
  Johannes Schuchhardt
- Evolutionary strategies of optimization
  Torsten Asselmeyer
  Werner Ebeling
  Helge Rose