Seminarausarbeitung

Optimierung industrieller Anwendungsprobleme

Thema:
Optimierung des Fahrzeugumlaufs im Öffentlichen Nahverkehr

Autor
Roland Tögel
vom
18.02.2000

Inhaltsverzeichnis:

1.Grundlage der Ausarbeitung

Diese Ausarbeitung liegt einer Veröffentlichung von M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker zugrunde [GLV].
In ihr wird auf das Problem und eine Lösung der Optimierung des Fahrzeugumlaufs im Öffentlichen Nahverkehr eingegangen, wobei Kenntnisse in der Linearen Programmierung vorausgesetzt werden.

2. Einleitung

Der Betrieb und Einsatz von Fahrzeugen im öffentlichen Nahverkehr kann als ein gigantisches Optimierungsproblem mit sehr vielen und komplexen Nebenbedingungen gesehen werden. Anhand des Beispiels der Busumlaufplanung werden wir das Problem zunächst verbal formulieren, anschließend mathematisch darstellen und zuletzt eine Lösungsmöglichkeit des Problems angeben.

3. Das Fahrzeugumlaufplanungsproblem

3.1 Voraussetzungen, Aufgabe und Ziel

Wir gehen davon aus, das ein Fahrplan, der angibt wann und von wo nach wo Fahrten stattzufinden haben, erstellt wurde. Des weiteren ist festgelegt, welche Arten von Busse (z.B.: Standardbusse, Doppeldecker oder Gelenkbusse) die festgelegten Fahrten durchführen können. Diese wird zum einen durch die zu erwartenden Fahrgastzahlen als auch durch die bestehende Infrastruktur bestimmt. Ein Doppeldecker kann nicht unter zu niedrigen Brücken durchfahren und ein Gelenkbus kann eine zu enge Kurve nicht befahren.
Ein Verkehrsunternehmen muss nun Busse zur Verfügung stellen, um alle im Fahrplan verzeichneten Fahrten durchzuführen. Das Ziel ist nun, so wenig Fahrzeuge wie möglich einzusetzen und die Kosten für deren Betrieb (in diesem Fall die gefahrenen Kilometer) so gering wie möglich zu halten.

3.2 Begriffsdefinition

Wie wollten zunächst einige Begriffe definieren, die im Laufe des Textes verwendet werden und später mathematisch formuliert werden.

3.2.1 Depot:

Ein Depot ist eine Menge von gleichwertigen Fahrzeuge (hier Busse), die an einem Ort zusammengefasst werden. Ein Depot hat jeweils einen Startpunkt und einen Endpunkt, an dem ein Fahrzeug des Depots jeweils sein Fahrt beginnt bzw. beendet. Die angemessene Einteilung der Fahrzeuge eines Verkehrsunternehmens ist die Aufgabe des Planers des Verkehrsunternehmens und wird hier nicht weiter betrachtet. Im Extremfall können alle Fahrzeuge zu einem Depot zusammengefasst werden oder im anderen Extrem jedes Fahrzeug für sich allein als ein Depot angesehen werden. In der Praxis werden in der Regel alle Fahrzeuge des gleichen Typs zu einem Depot zusammengefasst.

3.2.2 Fahrgastfahrt:
Aus dem zugrundeliegenden Fahrplan (und Linienplan) können die Fahrgastfahrten (die durchzuführenden Fahrten) mit ihren Anfangs- und Endhaltepunkt sowie Start- und Endzeiten ermittelt werden. Jede dieser Fahrgastfahrten wird nun eine Depotgruppe zugeordnet, die aussagt, welche
Depots Fahrzeuge zur Durchführung der Fahrt zur Verfügung stellen kann.

3.2.3. Leerfahrt:
Eine Fahrt, bei der keine Fahrgäste befördert werden.
Dazu gehört die Einsetzfahrt, die Aussetzfahrt und die Kopplung.

3.2.4. Einsetzfahrt:
Eine Einsetzfahrt ist eine Leerfahrt eines Fahrzeugs von dem Startpunkt eines Depots zum Anfangshaltepunkt einer Fahrgastfahrt.

3.2.5 Aussetzfahrt:
Eine Aussetzfahrt ist eine Leerfahrt eines Fahrzeugs von dem Endhaltepunkt einer Fahrgastfahrt zum Endpunkt eines Depots.

3.2.6 Kopplung:
Eine Kopplung ist eine Leerfahrt eines Fahrzeugs von dem Endhaltepunkt einer Fahrgastfahrt zum Starthaltepunkt einer weiteren Fahrgastfahrt.

3.2.7 Umlauf:
Ein Umlauf ist eine Kette von Fahrten beginnend mit einer Einsetzfahrt, gefolgt von beliebig vielen Fahrgastfahrten (durch Kopplungen verbunden) und einer abschließenden Aussetzfahrt. Dabei beginnt und endet der Umlauf immer im selben Depot

3.2.8 Betriebshoffahrt:
Ist es möglich zwei Umläufe (bezüglich des gleichen Depots) unter Einhaltung einer bestimmten Wartezeit im Depot zu verbinden heißt diese Verbindung Betriebshoffahrt

3.2.9 Umlaufkette:
Eine Folge von durch Betriebhoffahrten verbundenen Umläufen heißt Umlaufkette

3.2.10 Kosten:
Jeder Fahrt (sowohl Fahrgastfahrten als auch Leerfahrten) können Depotspezifische (d.h. je nachdem aus welchem Depot das verwendetet Fahrzeug stammt) Kosten zugewiesen werden. Die Kosten eines Umlaufs bzw. einer Umlaufkette ergibt sich dann aus der Summe der beinhalteten Fahrgast- und Leerfahrten.

3.3 Ziel der Optimierung

Hauptziel der gängigsten Umlaufoptimierungsprogrammen ist die Minimierung der Anzahl der Umläufen. Gleichzeitig wurde behauptet, das durch die Bestimmung der minimalen Anzahl der Umläufe auch die minimale Anzahl der Fahrzeuge bestimmt wurde. Diese ist i.a.

jedoch falsch (siehe [Lo1]). Durch die Einführung der Umlaufketten ist dieses Problem jedoch behoben und führt dazu, dass die Minimierung der Anzahl der Umlaufketten äquivalent zur Bestimmung der minimalen Fahrzeuganzahl ist.
Durch die zuvor verbal definierten Begriffe könnten wir nun das Umlaufplanungsproblem quantifizieren. Ziel ist eine kostenminimalen Menge von Umlaufketten, so dass jede Fahrgastfahrt aus dem Fahrplan genau in einer Umlaufkette enthalten ist.

3.4 Nebenbedingungen

Von den Verkehrsbetrieben wird zusätzlich noch gewünscht, dass einige Nebenbedingungen bei der Erstellung eines Umlaufplans beachtet werden. Folgende Bedingungen (auf die hier im Detail nicht weiter eingegangen wird) können in unserem Model beachtet werden:

- Vermeidung von Linienwechsel
- Vermeidung von Fahrartenwechsel (Stamm-, Ergänzung- und Schulbusfahrt)
- Maximale Wendezeit
- Definieren von Erst- und Letztfahrten

Alle diese Bedingungen können durch Streichen bzw. Einfügen entsprechender Kopplungen in unserem Model berücksichtigt werden.

Bedingungen die nicht berücksichtigt werden können sind:

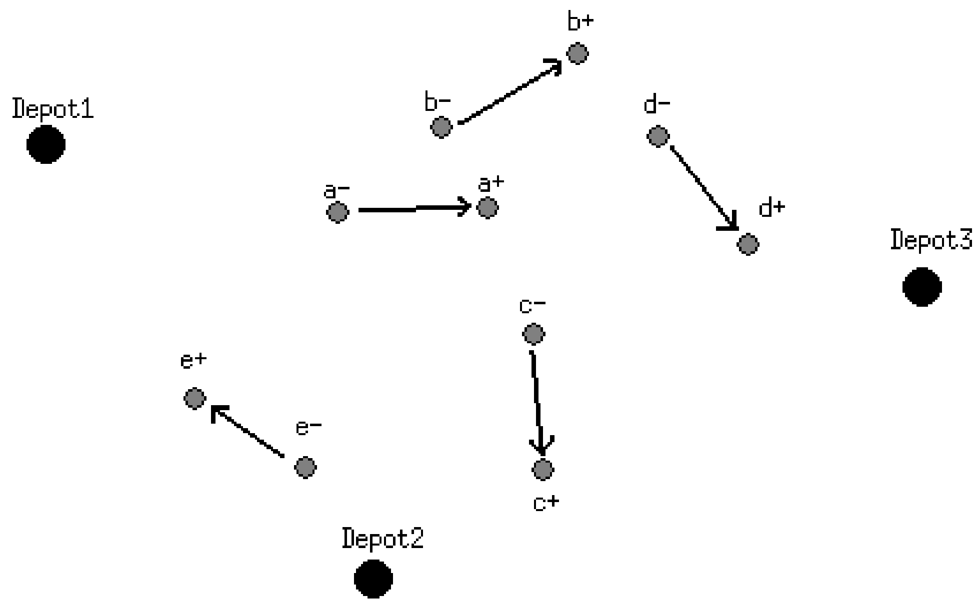
- Maximale Umlaufdauer
- Maximale Umlauflänge
- Maximale Anzahl von Linienwechsel pro Umlauf
- Dienstplanung und maximale Lenkzeiten

Diese Bedingungen können jedoch durch heuristische oder manuelle Nachbearbeitungen in die Planung mit einbezogen werden (siehe [FP]).

4 Mathematisches Model

Wir stellen nun ein Beispiel vor, das wir in mathematisches Model überführen wollen. Hierzu führen wir den Digraphen (gerichteter Graph) D := (V, A) ein,
wobei : V : Menge der Knoten
A : Menge der Kanten

4.1 Beispielplan.



Räumlich Plan für der Durchführung der Fahrgastfahrten a, b, c, d und e.

Zeitliche Durchführung: a: von 8^{00} Uhr bis 8^{30} Uhr
b: von 9^{15} Uhr bis 10^{10} Uhr
c: von 11^{05} Uhr bis 11^{45} Uhr
d: von 13^{30} Uhr bis 14^{30} Uhr
e: von 16^{00} Uhr bis 17^{00} Uhr

4.2 Knoten

d	:	Depot	
D	:	Menge der Depots,	$d \in D$
d^+	:	Startpunkt des Depots t	
d^-	:	Endpunkt des Depots t	

$D^+ := \{ d^+ \mid d \in D \}$ und $D^- := \{ d^- \mid d \in D \}$

t	:	Fahrgastfahrt
T	:	Menge der Fahrgastfahrten, $t \in T$
t^-	:	Starthaltepunkt der Fahrgastfahrt t
t^+	:	Endhaltepunkt der Fahrgastfahrt t

$T^+ := \{ t^+ \mid t \in T \}$ und $T^- := \{ t^- \mid t \in T \}$

$V := D^+ \cup D^- \cup T^+ \cup T^-$

In unserm Beispiel
$V := \{1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-, a^-\ a^+, b^-, b^+, c^-, c^+, d^-, d^+, e^-, e^+\}$

Zuordnen von Fahrgastfahrten zu Depots.

$\forall\, t \in T$
$G(t) \subseteq D$ ist die (nicht leere) Menge der Depots, deren Fahrzeuge die Fahrgastfahrt t durchführen können.

T_d ist die Menge aller Fahrgastfahrten, die von Fahrzeugen des Depots $d \in D$ durchgeführt werden können.

$T_d := \{ t \in T \mid d \in G(t)\}$

$T^-_d := \{ t^- \mid t \in T_d\}$ und $T^+_d := \{ t^+ \mid d \in T_d\}$

$V_d := \{(d^+, d^-) \cup T^+_d \cup T^-_d\}$

In unserem Beispiel

$T_1 = \{a, b, c, d\}$, $V_1 = \{1^+, 1^-, a^-\ a^+, b^-, b^+, c^-, c^+, d^-, d^+\}$

$T_2 = \{a, c, e\}$, $V_2 = \{2^+, 2^-, a^-\ a^+, c^-, c^+, e^-, e^+\}$

$T_3 = \{a, b, c, d\}$, $V_3 = \{3^+, 3^-, c^-, c^+, d^-, d^+\}$

4.3 Kanten

A_d^{gast}	:=	$\{(t^-, t^+) \mid t \in T_d\}$	(Fahrgastfahrten)
A_d^{ein}	:=	$\{(d^+, t^-) \mid t^- \in T^-_d\}$	(Einsetzfahrten)
A_d^{aus}	:=	$\{(t^+, d^-) \mid t^+ \in T^+_d\}$	(Aussetzfahrten)
A_d^{kopp}	:=	$\cup$Kopplungen (p, q) für $_d\{(p^+, q^-)\}$	(Kopplung)

wenn: $\text{zeit } p^+ + \Delta(p^+, q^-) <= \text{zeit } q^-$

$A_d^{leer} := \quad A_d^{ein} \cup A_d^{aus} \cup A_d^{kopp}$ (Leerfahrten)

(so können bis zu $\frac{t^2 + 3t}{2} * d$ Leerfahrten entstehen)

Des weiteren gibt es sogenannte Rückführungsbögen (d^-, d^+) um im Graphen einen geschlossenen Kreis zu erhalten.

$A_d := A_d^{gast} \cup A_d^{leer} \cup \{(d^-, d^+)\}$

$A := \cup_{d \in D} A_d$

In unserem Beispiel

$A_1^{gast} := \{(a^-, a^+), (b^-, b^+), (c^-, c^+), (d^-, d^+)\}$

$A_1^{ein} := \{(1^+, a^-), (1^+, b^-), (1^+, c^-), (1^+, d^-)\}$

$A_1^{aus} := \{(a^+, 1^-), (b^+, 1^-), (c^+, 1^-), (d^+, 1^-)\}$

$A_1^{kopp} := \{(a^+, b^-), (a^+, c^-), (a^+, d^-), (b^+, c^-), (b^+, d^-), (c^+, d^-)\}$

$A_2^{gast} := \{(a^-, a^+), (c^-, c^+), (e^-, e^+)\}$

$A_2^{ein} := \{(2^+, a^-), (2^+, c^-), (2^+, e^-)\}$

$A_2^{aus} := \{(a^+, 2^-), (c^+, 2^-), (e^+, 2^-)\}$

$A_2^{kopp} := \{(a^+, c^-), (a^+, e^-), (c^+, e^-)\}$

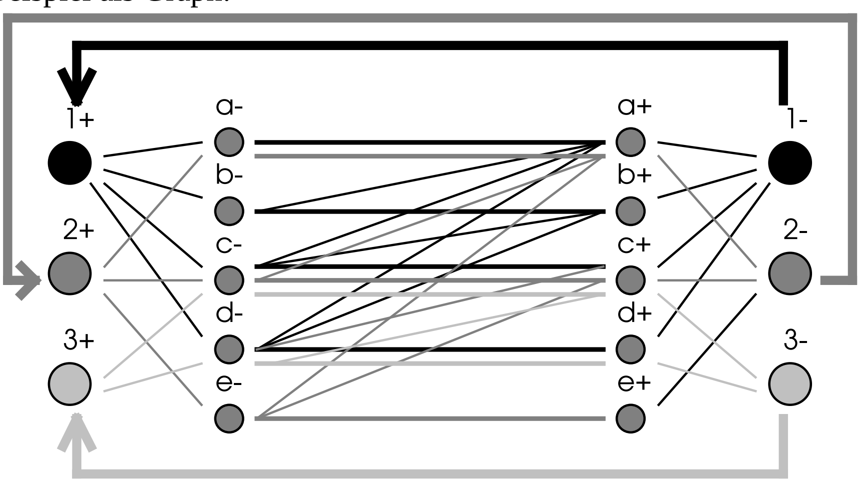
$A_3^{gast} := \{(c^-, c^+), (d^-, d^+)\}$

$A_3^{ein} := \{(3^+, c^-), (3^+, d^-)\}$

$A_3^{aus} := \{(c^+, 3^-), (d^+, 3^-)\}$

$A_3^{kopp} := \{(c^+, d^-)\}$

Unser Beispiel als Graph:



4.4 Kosten

für jede Kante aus A führen wir Kosten ein:

$\forall\, a \in A_d \qquad \exists\, c^d_a \in \mathbb{Q}$

Kostentabelle

c^1_a		c^2_a		c^3_a	
$(1^+, a^-) = 2$	$(a^+, b^-) = 1$	$(2^+, a^-) = 3$	$(a^+, c^-) = 1$	$(3^+, c^-) = 3$	$(c^+, d^-) = 2$
$(1^+, b^-) = 3$	$(a^+, c^-) = 1$	$(2^+, c^-) = 3$	$(a^+, e^-) = 3$	$(3^+, d^-) = 3$	$(3^-, 3^+) = 100$
$(1^+, c^-) = 5$	$(a^+, d^-) = 1$	$(2^+, e^-) = 1$	$(c^+, e^-) = 2$	$(c^-, c^+) = 1$	
$(1^+, d^-) = 6$	$(b^+, c^-) = 3$	$(a^-, a^+) = 1$	$(2^-, 2^+) = 100$	$(d^-, d^+) = 1$	
$(a^-, a^+) = 1$	$(b^+, d^-) = 1$	$(c^-, c^+) = 1$		$(c^+, 3^-) = 3$	
$(b^-, b^+) = 1$	$(c^+, d^-) = 3$	$(e^-, e^+) = 1$		$(d^+, 3^-) = 1$	
$(c^-, c^+) = 1$	$(1^-, 1^+) = 100$	$(a^+, 2^-) = 4$			
$(d^-, d^+) = 1$		$(c^+, 2^-) = 2$			
$(a^+, 1^-) = 4$		$(e^+, 2^-) = 3$			
$(b^+, 1^-) = 5$					
$(c^+, 1^-) = 6$					
$(d^+, 1^-) = 7$					

Man beachte die extrem hohen Kosten der Rückführungsbögen $(1^-, 1^+)$, $(2^-, 2^+)$ und $(3^-, 3^+)$. Diese Kosten stehen für den Einsatz eines Fahrzeuges und sollen dazu führen, das möglichst wenig Fahrzeuge eingesetzt werden. Dies wird an zwei Beispielen erläutert:

Beispiel 1 für Rückführungsbogenkosten = 0:

Umlaufplan 1:

Depot	Fahrgastfahrten	Kosten	Gesamt
1	a, b, c, d	2+1+1+1+3+1+3+1+7+0	20
2	e	1+1+3+0	5
3			

Gesamtkosten: 25

Umlaufplan 2:

Depot	Fahrgastfahrten	Kosten	Gesamt
1	a, b	2+1+1+1+5+0	10
2	e	1+1+3+0	5
3	c, d	3+1+2+1+1+0	8

Gesamtkosten: 23

Somit wäre Umlaufplan 2 besser als Umlaufplan 1, obwohl mehr Fahrzeuge (3 anstatt 2) verwendet werden.

Beispiel 2 für Rückführungsbogenkosten = 100:

Umlaufplan 1:

Depot	Fahrgastfahrten	Kosten	Gesamt
1	a, b, c, d	2+1+1+1+3+1+3+1+7+100	120
2	e	1+1+3+100	105
3			

Gesamtkosten: 225

Umlaufplan 2:

Depot	Fahrgastfahrten	Kosten	Gesamt
1	a, b	2+1+1+1+5+100	110
2	e	1+1+3+100	105
3	c, d	3+1+2+1+1+100	108

Gesamtkosten: 323

Somit wäre Umlaufplan 1 besser als Umlaufplan 2
(Umlaufplan 3 ist allerdings das Optimum)

Umlaufplan 3:

Depot	Fahrgastfahrten	Kosten	Gesamt
1	a, b, d	2+1+1+1+1+1+7+100	114
2	c, e	3+1+2+1+3+100	110
3			

Gesamtkosten: 224

Es ist also wichtig, die Kosten für die Rückführungsbogen hinreichend groß zu wählen, damit sie immer größer sind als die Kosten die eine Umlaufkette in der Summe erreichen kann.

Es sei denn, man verzichtet auf eine Minimierung der Fahrzeuge und kann somit eine Fahrgastfahrt durch ein näher gelegenes Depot bedienen und spart somit die Kosten von einer Fahrt von einem weiter entfernten Depot. Man sollte die Kosten für die Rückführungsbögen dann im wirklichen Verhältnis zwischen dem Einsatz eines weiteren Fahrzeuges und der Mehrfahrt eines bereits zu verwendeten Fahrzeugs setzen (auf diese Variante wird hier jedoch nicht weiter eingegangen).

4.5 Entscheidungsvariablen:

für jede Kante aus A führen wir Entscheidungsvariablen/Zähler und Kapazitätsschranken ein:

$\forall\, a \in A_d$ $\quad x^d_a$ (Entscheidungsvariable/Zähler)

l^d_a (untere Schranke)

u^d_a (obere Schranke)

$$l^d_a <= x^d_a <= u^d_a \qquad (1)$$

wobei wenn $a = (d^-, d^+)$ dann ist:

$l^d_a \in \mathbb{N}$: Anzahl der Fahrzeuge die das Depot verlassen müssen.

$u^d_a \in \mathbb{N}$: maximale Anzahl der Fahrzeuge des Depots

$x^d_a \in \mathbb{N}$: Zähler wie viele Fahrzeuge des Depots eingesetzt wurden

für die übrigen Kanten ist $l^d_a = 0$ und $u^d_a = 1$

x^d_a : Entscheidungsvariable

Damit der Vektor $x := ((x^d_a)_{a \in A})_{d \in D} \in \mathbb{Z}^A$ eine zulässige Lösung des Umlaufplanungsproblems darstellt muss er noch folgende Bedingungen (2-3) erfüllen:

$$\sum_{a \in \delta^-(v) \cap A_d} x^d_a - \sum_{a \in \delta^+(v) \cap A_d} x^d_a = 0 \qquad \forall\, v \in V\ \forall\, d \in D \qquad (2)$$

$a \in \delta^-(v) := \{(i, j) \in A \mid j=v\}$ und $a \in \delta^+(v) := \{(i, j) \in A \mid i=v\}$

(alle Fahrzeuge die ein Knoten erreichen, müssen diesen auch wieder verlassen)

$$\sum_{a \in G(t)} x^d_{(t^-,t^+)} = 1 \qquad \forall\, t \in T \qquad (3)$$

(jede Fahrgastfahrt wird genau einmal von einem Fahrzeug der dazugehörigen Depotgruppe befahren)

Das Umlaufplanungsproblem kann somit als folgendes lineares ganzzahliges Optimierungsproblem dargestellt werden:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{Z}^A \\ x \text{ erfüllt (1-3)}}} \sum_{d \in D} \sum_{a \in A_d} c^d_a x^d_a \qquad (4)$$

$$\mathrm{MDVS}(D) = \{x \in \mathbb{Z}^A \mid x \text{ erfüllt (1-4)}\}$$

(multi-depot vehicle scheduling)

4.6 Schrumpfen des Digraphen

von D := (V, A) $\rightarrow$ D' := (V', A')

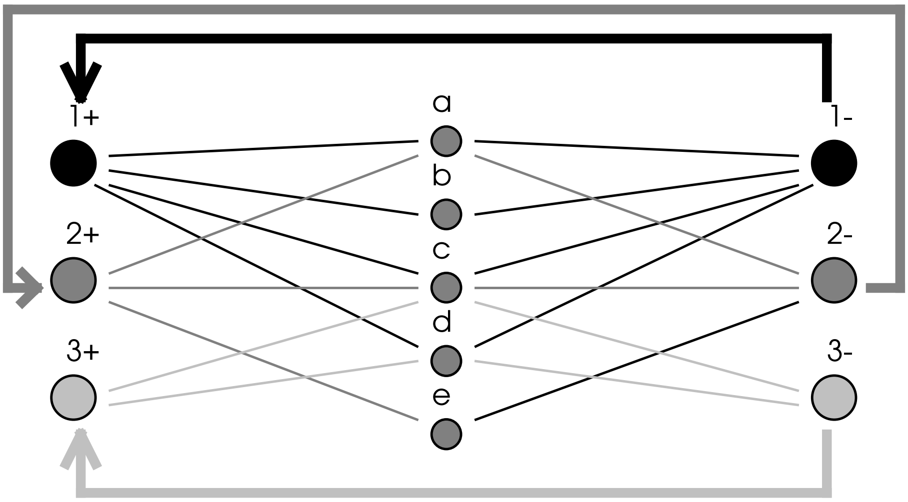
- Eliminieren der Kanten (t^-,t^+)) d alles was in t^- hineinfließt in t^+ herausfließt
- Knoten t^- und t^+ werden durch t ersetzt
- Kanten mit t^- als Endknoten erhalten t als neuen Endknoten
- Kanten mit t^+ als Anfangsknoten erhalten t als neuen Anfangsknoten
- (Kosten von (t^-, t^+) auf Kosten der Kanten die zu t^- führen aufaddieren)

$V' := D^+ \cup D^- \cup T$

$A'_d := A_d^{leer} \cup \{(d^-,d^+)\}$

$A' := \cup_{d \in D} A'_d$

Unser Beispiel als geschrumpfter Graph (wegen der Übersichtlichkeit ohne die Kopplungen)



Nach dem Eliminieren aller Variablen der Form $x^d_{(t^-,t^+)}$ kann durch Kombinieren von (2) und (3) die Gleichung (3) durch folgende Gleichung ersetzt werden:

$$\sum_{a \in \delta^-(t)} x_a^d = 1 \quad \forall\, t \in T \qquad (5)$$

(jeder Knoten $t \in T$ wird genau einmal von einem Fahrzeug der dazugehörigen Depotgruppe befahren)

4.7 Darstellung als lineares ganzzahliges Programm

Somit definiert jede zulässige (optimale) Lösung des folgenden linearen ganzzahligen Programms eine zulässige (optimale) Lösung des Umlaufplanungsproblems.
(In [FHW] und [BCP] werden ähnliche Modelle vorgeschlagen)

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{a \in A'_d} c^d_a \, x^d_a \qquad (6)$$

$$\sum_{a \in \delta^-(t)} x^d_a = 1 \qquad \forall\, t \in T \qquad (7)$$

$$\sum_{a \in \delta^-(v) \cap A'_d} x^d_a - \sum_{a \in \delta^+(v) \cap A'_d} x^d_a = 0 \qquad \forall\, v \in V' \quad \forall\, d \in D \qquad (8)$$

$$l^d_a <= x^d_a <= u^d_a \qquad \forall\, a \in A' \quad \forall\, d \in D \qquad (9)$$

$$x \text{ ganzzahlig} \qquad (10)$$

5. Lösungsansätze

5.1 Heuristische Lösungen

Zur Lösung unseres Models bieten sich heuristische Vorgehensweisen gerade zu an. Es ist bekannt, das Mehrgüterflussprobleme (multi-depot vehicle scheduling, kurz MDVS), also mit mehr als einem Depot, NP-schwer sind. Probleme mit einem Gut (single-depot vehicle scheduling, kurz SDVS), also mit einem Depot, dagegen in polynomieler Zeit mittels Minimum-Cost Flow Algorithmen gelöst werden können (siehe [AMO]).
Was liegt näher, als alle Depots zu einem einzigen Depot zusammenzufassen um das vereinfachte Problem zu lösen.

5.1.1 Schedule – Cluster – Schedule

Hierbei werden zunächst alle Depots zu einem Depot zusammengefasst und das entstandene SDVS Problem wird gelöst (Schedule)
Es ist klar, das bei diesem Ansatz Umlaufketten entstehen können, die nicht von einem bestimmten Fahrzeugtyp (depot-rein) gefahren werden kann. Man muss also anschließend eine heuristische oder manuelle Nachbearbeitung der Lösung vornehmen, um wieder Umlaufketten zu erhalten, die depot-rein gefahren werden können.
Die depot-unreinen Umlaufketten werden dabei an den kritischen Stellen zerlegt, und anschließend wieder zu depot-reinen Umlaufketten zusammengeheftet (Cluster).
Dadurch erhält man eine Menge von Umlaufketten, die von einem bestimmten Depot bedient werden kann.
Abschließend kann man die zu bestimmten Depots zugeordneten Umlaufketten nocheinmal als ein SDVS Problem auffassen und mittels eines Minimum-Cost Flow Algorithmus lösen (Schedule). Dies geschieht dann, entsprechend der Anzahl der eingeteilten Depots, $|D|$ mal.
In der Praxis wird jedoch oft der letzte Scheduling Schritt weggelassen um man begnügt sich mit der heuristischen Verknüpfung der depot-reinen Umlaufketten.

5.1.2 Cluster – Schedule

Hierbei werden alle Fahrgastfahrten zunächst einem bestimmten Depot zugeordnet. (Cluster).
Anschließend werden die, entsprechend der Anzahl der eingeteilten Depots, $|D|$ SDVS Probleme mittels Minimum-Cost Flow Algorithmus gelöst. (Scheduling). Es ist klar, das hierbei nur depot-reine Umlaufketten entstehen können, da die Zuteilung der Fahrgastfahrten zu Beginn erfolgt.

Tests von M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker haben gezeigt (siehe [GLM]), dass die so erstellten Umlaufpläne, im Bezug auf die Fahranzahl und auch die Kosten, recht nahe am Optimum liegen. Gegenüber computergestützten manuell erzeugten Umlaufplänen konnte so eine Einsparung von ca. 3% der Fahrzeuge und bis zu 10% der Kosten erzielt werden.
Des weiteren können diese heuristischen Lösungen (da sie sehr schneller errechnet werden können) als untere Schranken für weitere (komplexere) Rechnungen verwendet werden.

5.2 Exakte Lösungen

Das vorgestellte Umlaufplanungsproblem kann durch das in 4.7 dargestellte ganzzahlige lineare Programm gelöst werden. Allerdings für dies bei großen Verkehrsbetrieben zu ganzzahligen Programmen mit mehreren Millionen Variablen. Dies ist wohl auch der Grund, warum bis heute nur wenige Versuche unternommen worden sind, reale Probleme exakt zu lösen (einige kleine Bespiele sind zu finden bei [FHW] und [RS]).

Deshalb wurde von M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker versucht mit Hilfe von LP-Techniken, die sich bei der Lösung von sehr großer Optimierungsproblemen bewährt hatten, das Umlaufplanungsproblem zu lösen.
Die Idee des „polyedrischen Ansatzes“ ist es, die konvexe Hülle MDVS(D') der zulässigen Punkte (6 – 10) zu betrachten. Die Ecken des Polytops MDVS(D') stellen die Lösungen des Umlaufplanungsproblems dar.

Da in der Praxis meist nur ein Bruchteil der notwendigen Ungleichungen bekannt sind und selbst diese exponentiell zu der Knotenzahl in D' ist,
versucht man "vernünftige Teilmengen" $B'x <= b'$ zu bilden.
Das so erhaltene linearen Programm: $\min\{c^T x \mid B'x <= b', Ex = e\}$ wird gelöst.

Entspricht die Optimallösung einem Umlaufplan ist man fertig.
Ansonsten muss man weitere Ungleichungen (Schnittmengen) zum linearen Programm hinzufügen.

Tests von M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker haben gezeigt, dass diese LP-Relaxirung in der Regel die minimale Anzahl der benötigten Fahrzeuge liefert, und bei den Kosten auch nur um bis zu 1% über den Kosten der optimalen LP-Lösung liegt.

Weiterführende Implementierungsdetails zur Berechnung des LP-Problems werden in [GLV] näher beschrieben.

5.3 Rechenergebnisse realer Probleme

Abschließend noch die Ergebnisse von Testrechnungen realer Fahrzeugumlaufplanungen (anhand der Hamburg Hochbahn AG, Berliner Verkehrsbetriebe und der Verkehrsbetriebe Hamburg-Holstein AG). Die Ein-Depot-Probleme werden dabei nicht weiter erwähnt.
Tabelle 1 geht auf die realen Datensätze der 3 Verkehrbetriebe ein. Tabelle 2 skizziert die Zielfunktionswerte der mit dem Banch&Cut-Verfahren (siehe Implementierungsdetails von [GLV]) berechneten Optimallösungen sowie die besten Werte der heuristischen Lösungen.
Tabelle 3 enthält die jeweils dafür notwendigen Rechenzeiten. Deutlich wird hierbei der große Rechenzeitunterschied bei Problemen mit vielen Depots zwischen den optimalen Lösungen (mittels LP-Techniken) und den heuristischen Lösungen.

Tabelle 1: Mehr-Depot-Probleme

Verkehrsbetrieb	Depots	Fahrgastfahrten	Leerfahrten
Hamburg	40	16.239	15.100.000
Hamburg 1	12	8.563	11.400.000
Hamburg 2	9	1.834	1.100.000
Hamburg 3	2	791	200.000
Hamburg 4	2	238	24.000
Hamburg 5	2	1.461	620.000
Hamburg 6	2	2.283	1.700.000
Hamburg 7	2	341	36.000
Berlin	49	21.003	50.000.000
Hamburg-Holstein	4	3.413	3.700.00

Tabelle 2: Fahrzeugbedarf und Gewichtung

	Optimalwerte		Heuristische Lösung	
Verkehrsbetrieb	Fahrzeuge	Gewichtung	Fahrzeuge	Gewichtung
Hamburg	812	117.540	833	113.272
Hamburg 1	432	63.074	449	60.918
Hamburg 2	103	14.702	104	15.032
Hamburg 3	39	5.085	40	4.937
Hamburg 4	6	1.205	6	1.205
Hamburg 5	62	10.920	63	11.167
Hamburg 6	111	14.330	111	14.444
Hamburg 7	15	2.655	16	2.530
Berlin	1.157	194.202	1.166	197.849
Hamburg-Holstein	201	26.405	202	28.052

Tabelle 3: Rechenzeit in Stunden:Minuten auf SUN SPARCStation 20-71

Verkehrsbetrieb	optimal	fahrzeugminimal	heuristisch
Hamburg 1	56:47	50:10	0:10
Hamburg 2	4:07	2:52	0:05
Hamburg 3	0:04	0:03	0:01
Hamburg 4	0:01	0:01	0:01
Hamburg 5	0.08	0:05	0:03
Hamburg 6	0:06	0:01	0:01
Hamburg 7	0:01	0:01	0:01
Berlin	41:00	5:00	0:27
Hamburg-Holstein	1:55	0:33	0:03

6. Kritik

Beim lesen der Veröffentlichung von M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker drängt sich der Gedanke auf, dass für den Artikel nur eine sehr begrenze Anzahl von Seiten zur Verfügung stand. Dies wird besonders durch fehlende Erklärungen, fehlende Literaturhinweise und den sich daraus ergebenden offenen Fragen deutlich.

Doch glücklicherweise konnten viele dieser Punkte durch andere Veröffentlichungen der Autoren (die jedoch nicht in der beigefügten Literaturliste auftauchten) geklärt werden.

Was den Lösungsansatz mittels LP-Techniken betrifft, so ist zu sagen, dass der Artikel in diesem Abschnitt ohne erhebliche Vorkenntnisse nicht zu verstehen ist.

7. Literaturhinweise

[AMO] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti und J. B. Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1993

[BCP] I. Branco, A. Costa und J. M. P. Paixão. Vehicle scheduling problem with multiple type of vehicles and a single depot. In Daduna et al. [DBP]

[DBP] J. R. Dadunna, I. Branco und J. M. P. Paixão, editors. Computer-Aided Transit Scheduling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Verlag, 1995

[FHW] M. A. Forbes, J. N. Holt und A. M. Watts. An exact algorithm for multiple depots bus scheduling. European Journal of Operational Research, 72(1):115-123, 1994

[FP] R. Freling und J. M. P. Paixão. Vehicle scheduling with time constraint. In Dadunna et al. [DBP]

[GLV] M. Grötschel, A. Löbel und M. Völker. Optimierung des Fahrzeugumlaufs im Öffentlichen Nameverkehr. In [HJLS] Seite 609 - 624

[HJSF] K-H. Hoffman, W. Jäger, T. Lehmann und H. Schunck. Mathematik Schlüsseltechnologie für die Zukunft. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997

[Lo1] A. Löbel. Optimal Vehicle Scheduling in Public Transit. Dissertation, Technische Universität Berlin, erscheint 1996

[RS] C. C. Ribeiro und F. Soumis. A column generation approach to the multiple-depot vehicle scheduling problem. Operations Research, 42(2):41-52, 1994