

## Übungsblatt 11

Ausgabe: 16.01. Abgabeschluss: Mittw., 23.01., 9:45 Uhr, [eClaus.informatik.uni-stuttgart.de](http://eClaus.informatik.uni-stuttgart.de)

Abgabe erfolgt ausschließlich elektronisch über [eClaus.informatik.uni-stuttgart.de](http://eClaus.informatik.uni-stuttgart.de) – versuchen Sie nach Möglichkeit die Abgabe nicht in der letzten Minute zu machen!

Von jedem Aufgabenblatt werden maximal 20 Punkte auf den Schein angerechnet.

Die Aufgaben zur  $O$ -Notation auf diesem Aufgabenblatt sind zunächst von recht theoretischer Natur – die Anwendung in der Praxis folgt in den kommenden Wochen: wir werden bis zum Ende des Semesters bei vielen Übungsaufgaben uns jeweils überlegen, welchen Aufwand die Algorithmen in  $O$ -Notation haben.

1. (5 Punkte, schwer) **Virens scanner:** Wir haben gesehen, dass es Probleme gibt, die algorithmisch nicht lösbar sind. In der heutigen Zeit wäre ein universeller Virens scanner  $V$  ein sehr hilfreiches Werkzeug. Dieser soll ein Programm  $P$  als Eingabe bekommen und ausgeben, ob  $P$  das System mit einem Virus infizieren wird oder nicht.

Zeigen Sie, dass es solch einen universellen Virens scanner  $V$  nicht geben kann.

(Hinweis: die Eingabe für  $V$  ist das zu überprüfende Programm  $P$  – dies ist vergleichbar mit dem Ada-95-Übersetzer, auch dieser bekommt als Eingabe ein Programm (den von Ihnen geschriebenen Ada-Sourcecode) und liefert eine Ausgabe (das in Maschinensprache übersetzte Programm).)

2. (3+3+2 Punkte, mittel) **Definition  $O$ -Notation:** Die im Skript angegebenen Definitionen sind nicht einzige Möglichkeit die  $O$ -Notation zu definieren. Welche der folgenden Definitionen und Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a) i.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \exists c \in \mathbb{R}^+ : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$   
 ii.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \exists c \in \mathbb{R}^+ : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$   
 iii.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$   
 iv.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$   
 v.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$   
 vi.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \forall c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$   
 vii.  $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$

- (b) i.  $f \in O(g) \Rightarrow g \in O(f)$   
 ii.  $f \in o(g) \Rightarrow g \in o(f)$   
 iii.  $f \in \Theta(g) \Rightarrow g \in \Theta(f)$   
 iv.  $f \in o(g) \Rightarrow g \in \omega(f)$   
 v.  $f \in O(g) \Rightarrow g \in O(f + g)$   
 vi.  $f \in o(g) \Rightarrow g \in O(f + g)$   
 vii.  $f \in o(g) \Rightarrow g \in o(f + g)$

- (c)  $f \in O(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(n)/g(n)) = c, c \in \mathbb{R}$

3. (2+2+1 Punkte, mittel) **O-Notation:** Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- $3 \log_{10} n \in O(\log_2 n)$
- $(n+a)^b \in O(n^b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $b > 0$
- $3^n \in O(2^n)$

(b) Welche Beziehungen ( $=$ ,  $\subseteq$ ,  $\supseteq$ ) gelten zwischen den folgenden Funktionenklassen:

- $O(n\sqrt{n})$  und  $O(n \log^2(n))$
- $O(3^n)$  und  $O(n^n)$
- $O(2^{n+1})$  und  $O(2^n)$
- $O(2^{2n})$  und  $O(2^n)$

(c) Geben Sie eine Funktion an, die in  $o(1)$  (klein-o von 1) liegt, aber nicht konstant 0 ist.

4. (2 Punkte, mittel) **O-Notation II:** Irgendetwas stimmt da nicht ...

Behauptung:  $f(n) = 2^n \in O(1)$

Beweis: Vollständige Induktion nach  $n$ . Die Behauptung ist richtig für  $n = 1$ , denn  $2^1 = 2$  ist konstant, also in  $O(1)$ . Mit der Induktionsannahme  $2^{n-1} \in O(1)$  folgt nun sofort, dass  $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot O(1) = O(1)$ .

Finden Sie heraus, was hier nicht stimmt.

---

Fragen können im Forum [www.autip.de/forum/viewforum.php?f=218](http://www.autip.de/forum/viewforum.php?f=218) diskutiert werden. Weitere Informationen zur Vorlesung und Übung unter [www.fmi.uni-stuttgart.de/fk/lehre/ws07-08/autip1/](http://www.fmi.uni-stuttgart.de/fk/lehre/ws07-08/autip1/)