Übungsblatt 10

Ausgabe: 11.01. Abgabeschluss: Mittw., 18.01., 9:45 Uhr, `eClaus.informatik.uni-stuttgart.de`

Abgabe erfolgt ausschließlich elektronisch über `eClaus.informatik.uni-stuttgart.de` – versuchen Sie nach Möglichkeit die Abgabe nicht in der letzten Minute zu machen!

Von jedem Aufgabenblatt werden maximal 20 Punkte auf den Schein angerechnet.

Die Aufgaben zur O-Notation auf diesem Aufgabenblatt sind zunächst von recht theoretischer Natur – die Anwendung in der Praxis folgt in den kommenden Wochen: wir werden bis zum Ende des Semesters bei vielen Übungsaufgaben uns jeweils Überlegen, welchen Aufwand die Algorithmen in O-Notation haben.

---

1. (3+3+2 Punkte, mittel) **Definition O-Notation:** Die im Skript angegebenen Definitionen sind nicht einzige Möglichkeit die O-Notation zu definieren. Welche der folgenden Definitionen und Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) i. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \exists c \in \mathbb{R}^+ : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$
   ii. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \exists c \in \mathbb{R}^+ : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$
   iii. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$
   iv. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists c \in \mathbb{R}^+\ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$
   v. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$
   vi. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \forall c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$
   vii. $O(f) := \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$

   (b) i. $f \in O(g) \ \Rightarrow\ g \in O(f)$
   ii. $f \in o(g) \ \Rightarrow\ g \in o(f)$
   iii. $f \in \Theta(g) \ \Rightarrow\ g \in \Theta(f)$
   iv. $f \in o(g) \ \Rightarrow\ g \in \omega(f)$
   v. $f \in O(g) \ \Rightarrow\ g \in O(f+g)$
   vi. $f \in o(g) \ \Rightarrow\ g \in O(f+g)$
   vii. $f \in o(g) \ \Rightarrow\ g \in o(f+g)$

   (c) $f \in O(g) \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}(f(n)/g(n)) = c,\ c \in \mathbb{R}$

2. (2+2+1 Punkte, mittel) **O-Notation:** Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   - $3\log_{10} n \in O(\log_2 n)$
   - $(n+a)^b \in O(n^b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$
   - $3^n \in O(2^n)$

   (b) Welche Beziehungen $(=, \subseteq, \supseteq)$ gelten zwischen den folgenden Funktionenklassen:
   - $O(n\sqrt{n})$ und $O(n\log^2(n))$
   - $O(3^n)$ und $O(n^n)$
   - $O(2^{n+1})$ und $O(2^n)$
   - $O(2^{2n})$ und $O(2^n)$

   (c) Geben Sie eine Funktion an, die in $o(1)$ (klein-o von 1) liegt, aber nicht konstant 0 ist.

3. (2 Punkte, mittel) O**-Notation II:** Irgendetwas stimmt da nicht ...

   Behauptung: $f(n) = 2^n \in O(1)$
   Beweis: Vollständige Induktion nach n. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$, denn $2^1 = 2$ ist konstant, also in $O(1)$. Mit der Induktionsannahme $2^{n-1} \in O(1)$ folgt nun sofort, dass $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot O(1) = O(1)$.

   Finden Sie heraus, was hier nicht stimmt.

4. (5+3(+3) Punkte, mittel) Damit Sie (bis es ab nächster Woche auch in der Vorlesung wieder mit Programmierung weitergeht) nicht „einrosten“, hier nochmal eine kleine Programmieraufgabe ... das **n-Damen-Problem:** Auf einem Schachbrett kann eine Dame waagerecht, senkrecht und diagonal auf jedes Feld, das in diesen Richtungen liegt, wechseln. Eine Dame A bedroht eine andere Dame B, wenn die Dame B auf einem der Felder steht, auf das die Dame A wechseln kann.

   (5 Punkte) Schreiben Sie ein Programm, das alle Stellungen von 8 Damen auf einem 8×8-Schachbrett berechnet, so dass diese 8 Damen sich paarweise nicht bedrohen. Geben Sie auch die Gesamtzahl der gefundenen Lösungen an. Welche Anzahlen ergeben sich für n von 1 bis 10, wenn man n Damen auf einem $n \times n$-Schachbrett platzieren soll? Überlegen Sie sich, welche Laufzeit ihr Programm in O-Notation hat.

   (+3 Punkte) Modifizieren Sie das Programm so, dass Lösungen, die aus anderen Lösungen durch Drehung hervorgehen, nicht ausgegeben werden.

   Zusatzaufgabe (+3 Punkte): Modifizieren Sie das Programm weiter, so dass auch Lösungen, die aus anderen Lösungen durch Spiegelung hervorgehen, nicht ausgegeben werden.
