

**Wegeprobleme in Graphen      Übungsblatt 05**

Ausgabe: 03.07.

Besprechung am 11.07.

Ablauf der Übungen: Ausgabe der Übungen spätestens 8 Tage vor dem nächsten Übungstermin in der Vorlesung (pdf auf der Vorlesungsseite). Abgabe spätestens am Tag vor der Übung in der Vorlesung oder per E-Mail an [Lewandowski@fmi.uni-stuttgart.de](mailto:Lewandowski@fmi.uni-stuttgart.de).

1. (mittel–schwer) **Teilwegeigenschaften bei  $k$ -kürzesten Wegen:** Bei kürzesten Wegen wissen wir, dass Teilwege ebenfalls kürzeste Wege sind. Formulieren Sie eine ähnliche Eigenschaft für  $k$ -kürzeste Wege (im uneingeschränkten Problem) und beweisen Sie diese.

Zeigen Sie, dass solch eine Eigenschaft im eingeschränkten Fall nicht zutrifft.

2. (mittel)  **$k$ -kürzeste Wege in azyklischen Graphen:** Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der  $k$ -kürzesten Wege in azyklischen Graphen und geben Sie die Laufzeit in  $O$ -Notation an. Wie unterscheidet sich der Algorithmus abhängig davon, ob man das eingeschränkte oder uneingeschränkte  $k$ -kürzeste-Wege-Problem untersucht?
3. (mittel–schwer) **Doppelpunktfreie  $k$ -kürzeste Wege und  $k$ -kürzeste Wege in Graphen mit negativen Kantengewichten:** Überlegen Sie sich, wie sich das  $k$ -kürzeste-Wege-Problem in Graphen mit negativen Kantengewichten verändert im eingeschränkten und im uneingeschränkten Fall.

Versuchen Sie einen Algorithmus für dieses Problem zu entwerfen. (Zusätzliche Motivation: Wenn Sie mit Ihrem (korrekten) Algorithmus polynomielle Laufzeit garantieren können, gewinnen Sie den Hauptpreis.)

(Beachten Sie: Hat ein Graph negative Zyklen, so sind die  $k$ -kürzesten doppelpunktfreien Wege wohldefiniert – insbesondere gibt es dann auch stets einen kürzesten Weg.)

4. (mittel–schwer) **Nachträgliche Veränderung von Kantengewichten:** Nachdem wir in einem Graphen mit beliebigen Kantengewichten einen Kürzeste-Wege-Baum bestimmt haben, stellen wir fest, dass wir einige Kantengewichte zu niedrig gewählt haben. Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Korrektur des Kürzeste-Wege-Baums. Beachten Sie dabei, dass im Graphen negative Kanten vorkommen können! Welchen Aufwand in  $O$ -Notation hat Ihr Algorithmus? Untersuchen Sie die folgenden Fälle:
  - (a) Beliebig viele Kanten werden jeweils um einen beliebigen Betrag verlängert.
  - (b) Manche Kanten werden verkürzt und manche werden verlängert.
  - (c) Der Graph habe ganzzahlige Kantengewichte und die Summe der Verlängerungen betrage  $k$  (keine Kante wird verkürzt).
  - (d) Alle Kanten werden um den gleichen Betrag  $k$  verlängert (Hinweis: hierfür gibt es einen schnelleren Algorithmus als für Aufgabenteil (c)).
5. (mittel–schwer) **Aufteilung von Kantengewichten:** Gegeben sei ein Graph und ein Startknoten. Seien  $\gamma_1(\cdot)$  und  $\gamma_2(\cdot)$  zwei Gewichtsfunktionen und  $d_1(\cdot)$  und  $d_2(\cdot)$  jeweils die kürzesten Entfernungen zum Startknoten bzgl.  $\gamma_1(\cdot)$  bzw.  $\gamma_2(\cdot)$ . Zeigen Sie zunächst: Im Allgemeinen gilt für die kürzesten Entfernungen im Graphen mit  $\gamma(\cdot) = \gamma_1(\cdot) + \gamma_2(\cdot)$  nicht, dass  $d(\cdot) = d_1(\cdot) + d_2(\cdot)$ .

Überlegen Sie sich, wie sich  $d(\cdot)$  in Abhängigkeit von  $d_1(\cdot)$  und  $d_2(\cdot)$  darstellen lässt und überlegen Sie eine Beispielanwendung, bei der mit diesem Ansatz ein besserer Worst-Case erreicht werden kann, als wenn man direkt einen der Standard-Algorithmen einsetzt.