

Wegeprobleme in Graphen**Übungsblatt 04**

Ausgabe: 19.05.

Besprechung am 26.05., 8h45–9h30

Ablauf der Übungen: Die Übungen werden freitags, 8h45–9h30 (Raum 0.124) und zum Teil in der Vorlesung besprochen oder es werden Lösungshinweise gegeben. **Sie haben die Möglichkeit, Abgaben zu machen, die dann korrigiert werden.**

Eine allgemeine Empfehlung: Programmieren Sie die hier vorgestellten Algorithmen aus oder rechnen Sie zumindest unbedingt einige Beispiele durch, um die Eigenheiten der einzelnen Verfahren besser kennenzulernen.

1. (leicht) **Längste Wege:** In azyklischen Graphen sind auch längste Wege wohldefiniert. Entwerfen Sie einen Algorithmus für längste Wege in azyklischen Graphen.

Hat ein Graph keine Zyklen positiver Länge, so sind längste Wege auch für allgemeine Graphen definiert. Entwerfen Sie auch für diesen Fall einen Algorithmus.

Welchen Aufwand in O -Notation haben Ihre Algorithmen?

2. (leicht–mittel) **Stimmt's?** Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten mittels Beweis oder Gegenbeispiel!

- Haben die Kanten alle verschiedene Gewichte, so ist der Kürzeste-Wege-Baum eindeutig.
- Die kürzesten Wege sind in Graphen mit positiven Kantengewichten und dem zugehörigen ungerichteten Graphen (Kanten können in beide Richtungen durchlaufen werden) identisch.
- Erhöht (und verringert) man alle Kantengewichte um eine Konstante k , so erhöhen (bzw. verringern) sich die kürzesten Entfernungen um ein Vielfaches von k .
- Sind die kürzesten Wege nicht eindeutig, so findet Dijkstras Algorithmus denjenigen kürzesten Weg mit den wenigsten Kanten. Ist die Aussage für den Bellman-Ford-Algorithmus korrekt?

3. (leicht–mittel) **Dijkstras Algorithmus:** Zeigen Sie: In Graphen mit positiven Kantengewichten werden die Knoten in aufsteigender Reihenfolge der Entfernung zum Startknoten aus der Menge R ausgewählt.

Gilt dies auch in Graphen mit negativen Kantengewichten?

4. (mittel) **Dijkstra vs. Bellman-Ford:** Zeigen Sie an einem Beispiel, dass beim Bellman-Ford-Algorithmus bei Auswahl eines Knotens der Wert $D(v)$ aus R nicht unbedingt mit der Weglänge des Weges übereinstimmt, der über die Vorgängerknoten $\text{pred}(\cdot)$ definiert ist.

Zeigen Sie, dass beim Dijkstra-Algorithmus bei Auswahl eines Knotens der Wert $D(v)$ aus R stets mit der Weglänge des Weges übereinstimmt, der über die Vorgängerknoten $\text{pred}(\cdot)$ definiert ist. Betrachten Sie dabei auch den für die Bearbeitung von Graphen mit negativen Kantengewichten modifizierten Dijkstra-Algorithmus.

5. (schwer) **Dijkstra \cup Bellman-Ford:** Dijkstra funktioniert gut auf Graphen mit positiven Kantengewichten, Bellman-Ford hat einen deutlich besseren Worst-Case bei Graphen mit negativen Kantengewichten.

Überlegen Sie, wie man diese beiden Algorithmen so kombinieren kann, dass soweit möglich die Knotenauswahl nach Dijkstra durchgeführt wird und nur bei Korrekturen (d.h., ein Knoten wird nach Auswahl aus R zu einem späteren Zeitpunkt erneut in R eingefügt) auf Bellman-Ford umgeschwenkt wird. Wann kann man dann erneut die Auswahl nach Dijkstras Kriterium ausführen? Welchen Worst-Case hat Ihr Algorithmus?