Ergänzungen zum Manuskript:

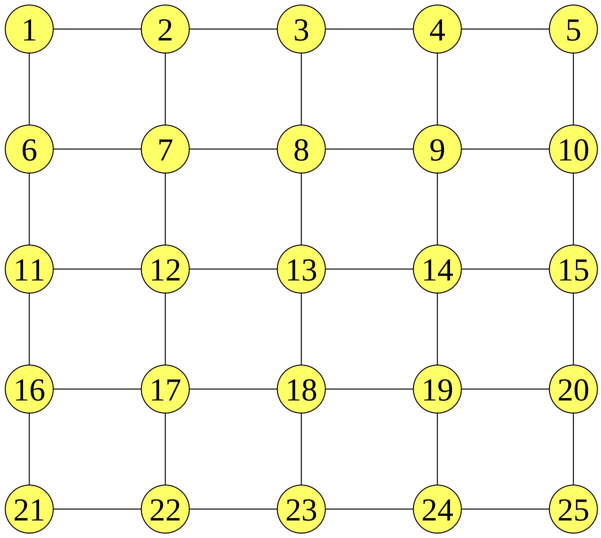
Auf diesen Folien wollen wir folgende Aussagen erläutern.

1. Die Zahl der verschiedenen (doppelpunktfreien) Wege zwischen zwei festen Knoten u und v in einem Graphen mit n Knoten und höchstens 2n Kanten kann bereits exponentiell wachsen. Wir geben ein Beispiel mit mehr als $4^{\sqrt{n}}$ solchen Wegen an („Gitter").

2. Hamiltonsche Wege/Kreise sind nicht leicht zu finden. (Manche von Ihnen werden später beweisen, dass dieses Problem NP-hart ist und daher nach heutiger Meinung nur mit exponentiellem Aufwand gelöst werden kann.)

3. Eulersche Wege/Kreise sind dagegen leicht zu finden. (Wir erläutern dies nur an einem Beispiel.)

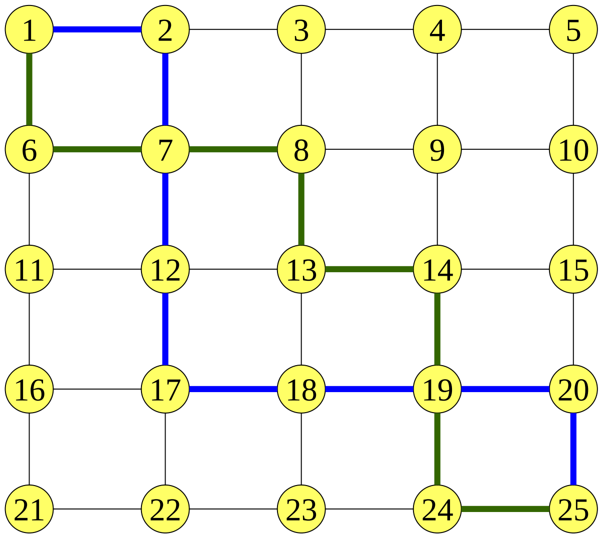
1. Berechne die Anzahl von Wegen zwischen zwei Knoten



Als Beispiel wählen wir ein ungerich-tetes „Gitter".

Knoten: 25.
Kanten: 40.

Wie viele verschiedene Wege gibt es von Knoten 1 nach Knoten 25?



Knoten: 25.
Kanten: 40.

Es sind mindestens

$$\binom{10}{5} = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 252 \text{ Wege.}$$

Allgemein: Wenn ein $k \times k$-Gitter mit $k^2 = n$ vielen Knoten gegeben ist, so gibt es mindestens $\binom{2k}{k}$ Wege zwischen den Knoten 1 und k^2.

Warum? Man kann genau k-mal eine Kante nach rechts („r") und genau k-mal eine Kante nach unten („u") gehen. Die Reihenfolge ist beliebig. Dies gibt eine Folge der Länge 2k bestehend aus je k Buchstaben „r" und „u". Man kann aus den 2k Positionen beliebig k Stellen für den Buchstaben „r" auswählen (auf die restlichen Stellen kommt dann der Buchstabe „u"). Dies sind genau „2k über k" Möglichkeiten. Dies ist aber nur ein Bruchteil der tatsächlichen Möglichkeiten, wie man sich leicht überlegt.

Man beachte: Die Zahl der Wege wächst exponentiell mit n. Denn es ist:

$$\binom{\mathbf{2k}}{\mathbf{k}} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!}$$

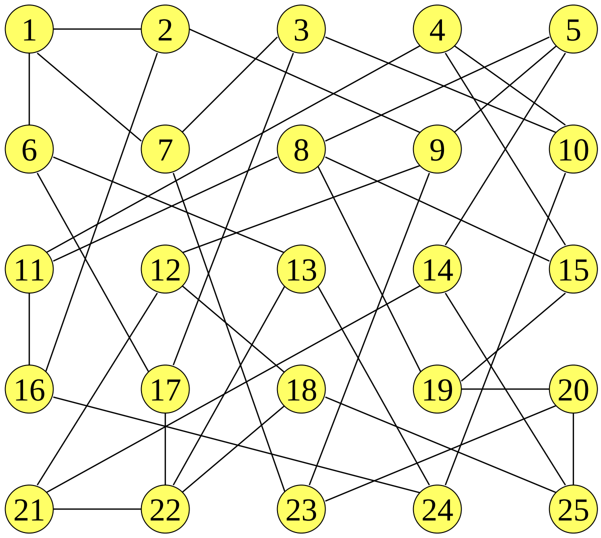
Mit der Stirlingschen Formel für die Fakultät

$$k! \approx \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot k} \qquad \text{mit } e = 2{,}718281828459\ldots$$

folgt hieraus durch Einsetzen und Ausrechnen:

$$\binom{\mathbf{2k}}{\mathbf{k}} \approx \frac{\mathbf{4^k}}{\sqrt{\pi \cdot \mathbf{k}}} \qquad \text{mit } k^2 = n.$$

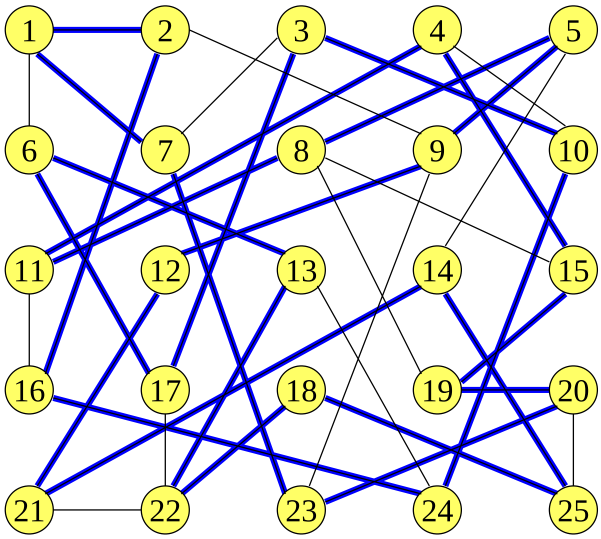
2. Finde einen Weg, der jeden Knoten genau einmal besucht



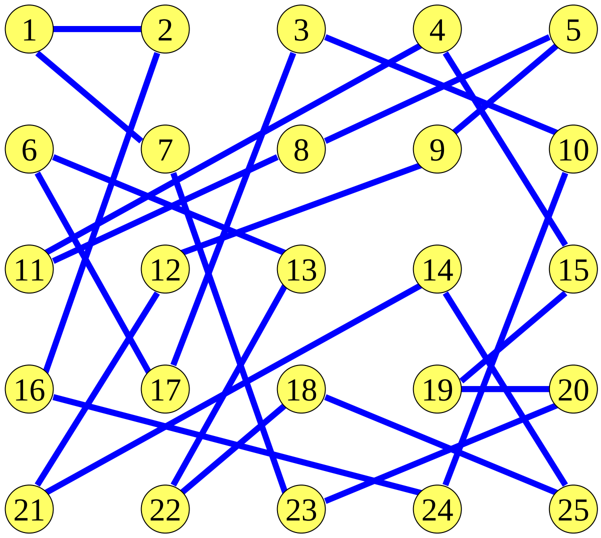
Knoten: 25

Kanten: 39

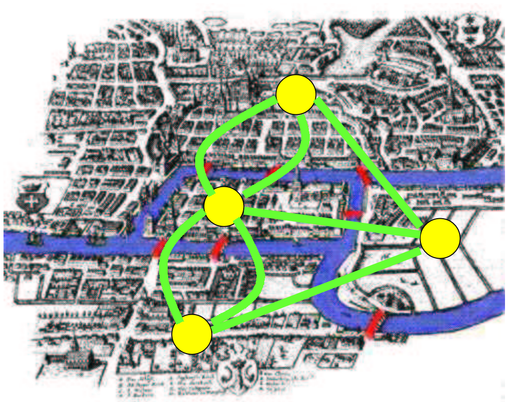
Gibt es in diesem Graphen einen Hamiltonschen Kreis?



Kreis: 1, 2, 16, 24, 10, 3, 17, 6, 13, 22, 18, 25, 14, 21, 12, 9, 5, 8, 11, 4, 15, 19, 20, 23, 7, 1

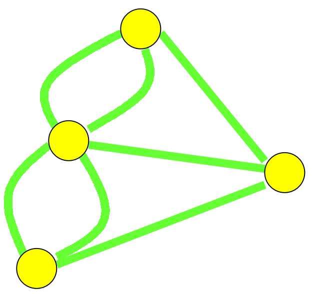


3. Eulersche Kreise: Das Königsberger Brückenproblem (1736)



Dieses Problem gilt als der Beginn der Graphentheorie.

Satz: Ein zusammenhängender ungerichteter Graph hat genau dann einen Eulerschen Kreis, wenn alle seine Knoten einen geraden Grad besitzen.



Eulers Beweis ergab: Es gibt keinen Rundgang durch Königsberg, auf dem jede Brücke nur einmal benutzt wird.

Satz: Ein zusammenhängender ungerichteter Graph hat genau dann einen Eulerschen Kreis, wenn alle seine Knoten einen geraden Grad besitzen.